
NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06633604 5



COURS

DE STATIQUE.

PARIS. — TYPOGRAPHIE DE FIRMIN DIDOT FRÈRES,
RUE JACOB, 56.

COURS

DE

STATIQUE,

A L'USAGE

ES ASPIRANTS A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

ET

DES ÉCOLES D'ARTILLERIE ET DE MARINE,

PAR A. MUTEL,

CAPITAINE D'ARTILLERIE,
ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, CHEVALIER DE LA LÉGION D'HONNEUR,
MEMBRE DE PLUSIEURS ACADÉMIES ET SOCIÉTÉS ROYALES.

LIBRAIRIE CLASSIQUE DE PERISSE FRÈRES,

PARIS, RUE DU POT DE FER S.-SULPICE, 8. || LYON, GRANDE RUE MERCIERE, 33.

1843.

AVERTISSEMENT.

Les diverses branches d'industrie ont reçu dans ces derniers temps une vive impulsion, par les nombreuses applications qu'on vient de faire des machines de toute espèce, et surtout des machines à vapeur. L'étude des machines est donc devenue indispensable à une foule de personnes peu familiarisées pour la plupart avec les hautes mathématiques, dont cette étude, au moins pour être approfondie , semblait naguère exiger l'emploi. Toutefois on a publié récemment plusieurs traités de mécanique purement industrielle ; mais ils offrent, en général, le double inconvénient de donner trop peu à la théorie, et surtout d'être d'un prix fort élevé, par suite du grand nombre de planches qu'ils contiennent. D'autres traités se bornent presque à présenter des séries de tableaux contenant des résultats d'expériences sur divers objets, mais dont les personnes, déjà versées dans la science, peuvent seules tirer quelque fruit pour la pratique. Nous avons donc pensé qu'il serait éminemment utile d'exposer les principes

de mécanique, et leurs principales applications, dans un traité spécial, n'exigeant d'autres connaissances que les notions ordinaires de la géométrie, et de l'algèbre jusqu'aux équations du premier degré, très-rarement celles du second degré.

D'un autre côté, l'accueil favorable fait à notre *Cours de mathématiques* nous avait depuis longtemps donné l'idée de le compléter par une *Statique*.

Nous avons donc rédigé ce nouvel ouvrage le plus simplement possible, et dans le double but de le faire servir en même temps de cours de Statique pour les aspirants à l'école Polytechnique, et de première partie au Traité de mécanique ci-dessus mentionné. Cette disposition est d'autant plus fondée, que l'on commence ordinairement, et avec beaucoup de raison selon nous, l'étude de la Mécanique par celle de la Statique.

Pour donner à ces éléments toute la simplicité désirable, nous avons considéré le théorème du parallélogramme des forces comme le principe fondamental de la Statique. De là nous avons en effet déduit, avec une extrême facilité, toutes les lois de la composition et de la décomposition des forces, et, par suite, les conditions d'équilibre, soit des corps ou systèmes de forme invariable entièrement libres dans l'espace, soit des corps gênés dans leurs mouvements par des obstacles quelconques, c'est-à-dire, des machines.

On peut arriver au même but par la *Théorie des couples*, due au savant M. Poinsot. Les per-

sonnes qui désireront suivre cette marche ne pourront mieux faire que d'étudier le *Traité de Statique* de son inventeur, où se trouvent parfaitement exposées les diverses propositions de la Théorie des couples, et leur application à la recherche des conditions de l'équilibre des machines.

Notre Statique est divisée en cinq chapitres. Le premier traite de la composition et de la décomposition des forces; le second, des moments et des conditions d'équilibre; le troisième, des mêmes conditions pour les corps non entièrement libres dans l'espace ; le quatrième chapitre donne la détermination des centres de gravité ; et le cinquième, les conditions d'équilibre des principales machines. Nous y avons particulièrement exposé la théorie de la balance du chanoine Quintenz, dite *balance à bascule*, actuellement adoptée dans tous les grands établissements civils et militaires.

L'ouvrage est terminé par un appendice sur le principe des vitesses virtuelles, qui permet d'établir avec la plus grande facilité les conditions d'équilibre des diverses machines. Comme la démonstration de ce principe est d'ailleurs aussi simple que rigoureuse, il serait bien à désirer qu'on l'adoptât exclusivement, ce qui abrégerait très-sensiblement cette partie des études.



COURS

DE STATIQUE.

APPENDICE.

§ 1. *Principe des vitesses virtuelles.*

§ 2. *Applications du principe des vitesses virtuelles aux principales machines.*

FIN DE LA TABLE.

COURS
DE STATIQUE.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

1. On appelle *matière* ou *substance matérielle* tout ce qui peut affecter nos sens.

Toute portion déterminée de matière se nomme *corps*. Ainsi le bois, l'eau, l'air, etc., sont des corps. La quantité de matière dont un corps est composé constitue ce qu'on appelle sa *masse*.

Les corps se présentent sous trois *états* principaux, qui en comprennent une foule d'autres intermédiaires, et qui sont : 1° les *corps à l'état solide*, ou les *solides*, comme l'or, le verre, le beurre, etc.; 2° les *corps à l'état liquide*, ou les *liquides*, comme l'eau, le vin, les liqueurs, le mercure, etc.; 3° les *corps à l'état gazeux*, ou les *gaz* et les *vapeurs*, comme l'air, la fumée, etc. Les corps de ces deux dernières classes ont reçu le nom commun de *fluides*.

2. L'*espace* est l'étendue indéfinie ou sans bornes qui contient tous les corps, et dont chacun occupe une portion plus ou moins considérable qu'on appelle son *volume* ou son *étendue*.

Deux corps ne peuvent occuper en même temps un même lieu; c'est en cela que consiste l'*impénétrabilité* de la matière.

Un corps est *en repos* quand il reste au même lieu de l'espace; il est au contraire *en mouvement* lorsqu'il occupe successivement divers lieux de l'espace. La propriété dont jouissent les corps de pouvoir exister, soit à l'état de repos, soit à l'état de mouvement, se nomme *mobilité*.

Ainsi les corps peuvent être conçus en mouvement ou en repos, quoique dans l'univers il n'y en ait probablement pas un seul qui soit absolument en repos. Comme la terre tourne sur elle-même et autour du soleil, aucun corps ne peut y posséder un repos *absolu*, mais seulement un repos *relatif;* ce qui arrive quand il conserve la même position par rapport aux corps terrestres que nous regardons comme *fixes*.

Il en est de même pour l'état de mouvement. S'il y avait un corps fixe dans la nature, on pourrait s'en servir pour évaluer d'une manière absolue les déplacements des autres corps par rapport à lui, et l'on connaîtrait ainsi leurs *mouvements absolus*. Mais à défaut d'un corps fixe, nous ne pouvons apprécier les mouvements absolus qui peuvent exister dans la nature; de sorte que les mouvements des corps, les uns par rapport aux autres, ne sont pour nous que des *mouvements relatifs*.

On distingue encore les mouvements *apparents* et les mouvements *réels*. Un corps peut nous paraître en mouvement, quoique parfaitement immobile sur la terre. Par exemple un batelier, qui, pour faire avancer sa nacelle, gaffe en marchant de l'avant à l'arrière, peut avoir un mouvement tellement combiné avec celui de la nacelle, qu'il ne change réellement pas de position sur le globe; aussi, dans ce cas, il paraît immobile à une personne suffisamment éloignée, tandis que son dépla-

cement apparent est très-sensible pour une personne peu écartée du rivage. De même, si l'on fait tourner une montre dans le sens opposé à la marche des aiguilles et avec un mouvement égal à celui qui porte l'une d'elles en avant, cette aiguille sera réellement immobile (par rapport au globe), quoique avec un mouvement apparent.

3. La matière est *inanimée* ou *inerte;* elle ne peut par elle-même se donner du mouvement, ni changer celui qu'elle a reçu : cette propriété de la matière se nomme *inertie.* C'est par suite de cette propriété qu'un corps en repos y demeurera toujours, à moins qu'une cause étrangère, telle que la pesanteur ou un moteur animé, ne l'en fasse sortir. En effet, comme le mouvement ne peut avoir lieu que dans une certaine direction, il n'y aura pas de raison pour que le corps se meuve plutôt d'un côté que de tout autre, et par conséquent il ne se mouvra pas. De même, l'état de mouvement d'un corps ne saurait être modifié que par l'intervention d'une cause étrangère. Une bille, poussée sur un billard avec quelque force que ce soit, s'arrête bien au bout de quelques instants; mais c'est par l'effet de deux causes qui s'opposent à la continuation du mouvement, savoir, le frottement de la bille sur le tapis et la résistance de l'air.

4. Toute cause, qui modifie actuellement ou tend à modifier l'état de repos ou de mouvement d'un corps, se nomme *force* ou *puissance.* Nous ajoutons « *ou tend à modifier* »; car, par exemple, un corps suspendu verticalement par un fil ne paraît pas actuellement changer d'état ; mais la pesanteur l'oblige à tirer sans cesse le fil, et le mettrait en mouvement si la résistance du fil ne s'opposait à cette action.

Une force ne nous est connue que par ses effets, et nous ignorons quelle est sa nature. Mais, sans connaître

la force en elle-même, nous concevons très-bien qu'*elle est appliquée à un certain point*, *qu'elle agit suivant une certaine direction et avec une certaine intensité.*

La *direction* d'une force est la ligne droite qu'elle tend à faire décrire au point où elle est appliquée; et par son *intensité* ou sa *grandeur*, on entend son rapport avec une certaine force convenue prise pour unité de mesure.

La vue d'un corps suspendu à l'extrémité d'un fil, l'effort plus ou moins grand que nous sommes obligés de faire pour produire ou pour empêcher le mouvement de différents corps, etc., nous donnent, dès la première enfance, l'idée de la direction de la force et de son intensité.

On voit donc qu'il y a trois choses à considérer dans une force: son point d'application, sa direction, et son intensité.

5. Avant tout, il est nécessaire de bien préciser comment on doit évaluer l'intensité des forces. Or, on ne peut les mesurer qu'en cherchant leur rapport avec une force convenue prise pour unité; et comme il y a des forces d'espèces bien diverses, puisqu'elles sont les causes de tous les mouvements qui existent dans la nature, il faut d'abord établir, comme dans tous les cas analogues (Voy. notre Géométrie, sect. I, prop. III), ce qu'on doit entendre par *forces égales,* et, par suite, par *force plus petite* ou *plus grande.* Supposons donc deux forces, P, Q, appliquées en sens contraires à un même point. Si ces forces se détruisent, on dit qu'elles sont *égales.* Lorsque cela n'a pas lieu, les forces sont *inégales*, et la force P est dite *plus petite* ou *plus grande* que la force Q, selon que le point d'application est entraîné dans le sens de la force Q ou dans le sens de la force P. D'après cela, si, après avoir reconnu que deux forces sont égales, on les applique à un même point, suivant la même direction et

dans le même sens, on aura une force *double*. Si l'on réunit de même 3, 4,... forces égales, on aura une force *triple*, *quadruple*, etc.; de sorte qu'en général une force *multiple* d'une autre doit être regardée comme formée par la réunion d'un certain nombre de forces égales à celle-ci, et agissant suivant une même direction.

On pourra donc évaluer les forces en nombres, en prenant à volonté une certaine force pour unité de mesure, et cherchant combien de fois celle dont on s'occupe contient cette unité. Le nombre trouvé représentera l'intensité de la force. Mais comme on évalue les lignes en nombres par le même procédé, on a donc eu naturellement l'idée de représenter les forces par des lignes, ce qui offre, en outre, l'avantage d'indiquer leurs directions. Ainsi, en disant que telle force est représentée en grandeur et en direction par telle ligne, on exprime qu'elle contient autant d'unités de force que la ligne contient d'unités de ligne, et, de plus, que la force agit dans la direction indiquée par la ligne.

6. Nous désignerons, selon l'usage, les forces par les lettres P, Q, R, S,.... placées sur les lignes qui représentent leurs directions, et nous supposerons que l'action d'une force telle que P, appliquée au point A de Fig. 1.
la ligne AP, a lieu de A vers P, c'est-à-dire que la force *tire* de A en P, ce qu'on précise ordinairement à l'aide d'une flèche. De même, en représentant l'intensité de la force par une certaine longueur déterminée AB, on la supposera toujours portée du côté où le point d'application A tend à se mouvoir. Si, donc, on dit simplement qu'une force est représentée par une longueur déterminée AB partant du point d'application A, on entendra que la force *tire* de A vers l'extrémité B.

On pourrait également adopter que la force *pousse* le point A du côté opposé au point B; mais la convention

une fois établie, on doit s'y conformer pour toutes les forces dont on s'occupe, et c'est la première hypothèse que nous adopterons dans cet ouvrage.

Pour indiquer que deux forces, dirigées suivant une même droite, agissent en sens contraires ou sont opposées l'une à l'autre, on fait ordinairement précéder l'une du signe + et l'autre du signe —. Cette notation cadre parfaitement avec la manière dont nous avons envisagé les quantités négatives dans notre Cours d'Algèbre (2e édit., n° 14).

7. Plusieurs forces, appliquées à la fois à un même corps, doivent nécessairement se modifier l'une l'autre, par suite de la liaison qui existe entre les diverses parties du corps; de sorte que chacun de ses points, soumis à une certaine force, ne prendra pas le mouvement que celle-ci tend à lui imprimer. On conçoit même que les forces appliquées peuvent s'entre-détruire, et ne produire aucun mouvement; dans ce cas, on dit que le corps est en *équilibre*, et, par suite, que les forces se font *équilibre*.

8. La *Mécanique* est la science qui traite de l'équilibre et du mouvement des corps. Elle se divise en quatre parties, savoir : la *Statique*, la *Dynamique*, l'*Hydrostatique* et l'*Hydrodynamique*. La Statique est la science de l'équilibre des forces appliquées à un corps solide. La Dynamique a pour but de déterminer le mouvement que prend un corps solide, sollicité par des forces qui ne se font pas équilibre. L'Hydrostatique et l'Hydrodynamique traitent de l'équilibre et du mouvement des fluides.

Dans le présent volume nous ne nous occuperons que de la Statique, par où l'on commence ordinairement l'étude de la Mécanique; et, en effet, l'objet de cette dernière science est de résoudre le problème général suivant :

Étant donné un corps, ou un système quelconque de

corps, sollicité par de certaines forces connues, trouver le mouvement que ce corps prendra dans l'espace?

Et réciproquement : *déterminer les relations des forces qui agissent sur un corps, pour qu'il prenne dans l'espace un mouvement donné?*

Or, pour résoudre ce problème, on cherche d'abord les relations que les forces doivent avoir entre elles, pour que le corps ou le système prenne un mouvement égal à zéro, c'est-à-dire reste en équilibre, et alors la solution du problème général se déduit facilement de celle du cas particulier qui fait l'objet de la Statique.

9. La Statique ne suppose pas que l'on connaisse l'effet actuel des forces sur la matière, ou des divers mouvements qu'elles peuvent lui imprimer, d'après leurs directions et leurs intensités : mais elle considère uniquement les forces comme des grandeurs de même espèce, et assigne les rapports qu'elles doivent avoir pour se contrebalancer ; de sorte que l'état d'équilibre des corps est le cas particulier de l'état de mouvement, où les effets des forces ont complétement disparu.

Dans la nature, presqu'aucun corps ne peut rigoureusement être mis en équilibre ; lorsque nous le jugeons tel, il n'en oscille pas moins, quoique extrêmement peu, autour d'une position centrale qu'il abandonne sans cesse, et vers laquelle le ramène à chaque instant la lutte des forces auxquelles il est soumis.

Mais en théorie, un corps en équilibre est absolument dans le même état que s'il était en repos. Cependant on peut encore distinguer l'équilibre d'avec le repos, en disant que, dans le premier cas, le corps est sollicité par des forces qui s'entre-détruisent, et, par conséquent, n'exercent réellement aucune espèce d'action sur lui ; tandis que dans le cas du repos, le corps n'est sollicité par aucune force.

Dans la solution des problèmes, on doit donc regarder un corps en équilibre comme rigoureusement en repos; et réciproquement, si un corps est en repos, ou même sollicité par des forces quelconques, on peut lui supposer appliquées telles forces qu'on voudra, qui soient en équilibre d'elles-mêmes, et l'état du corps ne sera pas changé.

Cette observation nous sera fort utile dans la suite.

10. Lorsque plusieurs forces P, Q, R, S...., appliquées à un corps, se font équilibre, l'une quelconque P d'entre elles est nécessairement détruite par l'action de toutes les autres Q, R, S, ... Par conséquent une force P′, égale et directement opposée à la force P, et qui lui fait donc équilibre (5), produit le même effet que les forces Q, R, S,.... Cette force unique P′, qui produit sur un corps le même effet que plusieurs forces combinées Q, R, S...., s'appelle leur *résultante;* et les forces Q, R, S..., qui se réduisent à une seule P′, se nomment les *composantes* de P′.

L'ensemble des principes qui servent à déterminer la résultante de plusieurs forces, ou bien à décomposer une seule force en plusieurs capables du même effet, se nomme, selon le cas, *composition* ou *décomposition* des forces. Mais ces deux recherches se confondent en une seule, savoir celle de la loi qui lie la résultante à ses composantes.

11. Nous commencerons l'étude de la Statique par la détermination de cette loi; car une seule force étant capable de produire sur un corps le même effet que plusieurs, et d'en tenir parfaitement lieu, il est naturel de chercher d'abord à réduire au plus petit nombre possible les forces appliquées au corps ou au système que l'on considère, ce qui ramène les conditions de l'équilibre entre toutes les forces primitives aux conditions plus

simples de l'équilibre entre les forces finales qui leur sont équivalentes.

Nous supposerons d'abord que le corps ou le système est sans pesanteur, et qu'il n'est gêné dans son mouvement par aucun obstacle, c'est-à-dire qu'il est entièrement libre dans l'espace. Dès lors on n'aura plus à considérer que les efforts des seules forces appliquées, qui, dans le cas de l'équilibre, devront se détruire mutuellement.

Nous ferons, en outre, abstraction de tous les corps du système, en conservant seulement les points d'application considérés comme liés entre eux d'une manière invariable par des droites rigides, inextensibles et sans poids. En effet, il est facile de voir que les conditions de l'équilibre seront absolument les mêmes dans les deux cas.

Nous simplifierons donc la question en éliminant d'abord le poids et le volume des corps; mais pour appliquer les résultats ainsi obtenus au cas de la nature dont tous les corps sont pesants, nous leur restituerons plus tard leurs poids respectifs, et les considérerons comme de nouvelles forces qu'il faudra combiner avec les autres pour avoir les conditions réelles de l'équilibre.

Ainsi, dans la statique rationnelle, en recherchant les conditions de l'équilibre des forces, nous n'aurons à considérer que trois choses, savoir : leurs intensités, leurs directions et leurs points d'application. Par conséquent, les conditions de l'équilibre seront simplement les relations qui doivent exister entre ces trois choses pour que l'équilibre ait lieu; c'est ce qu'on appelle les *équations d'équilibre.*

CHAPITRE PREMIER.

COMPOSITION ET DÉCOMPOSITION DES FORCES.

SECTION PREMIÈRE.

COMPOSITION DES FORCES AGISSANT SUIVANT UNE MÊME DROITE.

12. La notion que nous avons donnée de la mesure des forces (5), permet d'admettre comme axiomes les propositions suivantes :

1° *Deux forces égales et directement opposées, appliquées soit à un même point, soit à deux points liés entre eux d'une manière invariable, se font équilibre.*

2° *Deux ou plusieurs forces appliquées à un même point, et agissant suivant une même droite et dans un même sens, ont une résultante égale à leur somme et agissant dans la même direction et dans le même sens.*

3° *Deux forces inégales, appliquées à un même point et agissant suivant une même droite, mais en sens contraires, ont une résultante égale à leur différence, et qui agit dans le sens de la plus grande force.*

13. La première de ces trois propositions est évidente; car il n'y a pas de raison pour que le mouvement ait lieu d'un côté plutôt que de l'autre.

De là il est facile de conclure le lemme suivant, qui est d'un fréquent usage en Statique :

LEMME. *Une force appliquée à un point d'un corps produit le même effet en quelque point de sa direction qu'on la suppose appliquée, pourvu que le nouveau point d'application soit lié au premier d'une manière invariable.*

Car soit la force P appliquée au point A d'un système quelconque, et M un point de sa direction lié au point A d'une manière invariable. Appliquons au point M, et dans la direction de AM, deux forces contraires P', — P', égales entre elles et à la force P. Comme les deux nouvelles forces se détruisent (12, 1°), il est clair (9) que la force P produit sur le corps le même effet que les trois forces P, P',—P'. Mais, d'après la seconde partie du premier axiome (12, 1°), les forces P, — P' se font équilibre. Donc la force P' produit aussi sur le corps le même effet que les trois forces P, P', — P', et, par conséquent, que la force P. Fig. 1.

REMARQUE GÉNÉRALE. A l'avenir, lorsque, dans une démonstration, nous changerons les points d'application des forces, il faudra sous-entendre que les nouveaux points sont liés aux premiers d'une manière invariable, ce dont nous prévenons ici une fois pour toutes.

14. La seconde des trois propositions (12) résulte évidemment, comme nous l'avons dit, de la manière de mesurer les forces (5), et sert de base à toute la Statique. On peut la regarder, avec le savant Poinsot, comme un *postulatum*, qui est, au reste, le seul réclamé par la science. En l'admettant pour deux forces, on le conclut aisément pour tant de forces qu'on voudra, en les combinant successivement deux à deux. Ainsi, un nombre quelconque de forces P, Q, S....., agissant suivant une même droite et dans le même sens, ont une résultante $R = P + Q + S +$ etc.

Quant à la troisième proposition relative à deux forces P, Q agissant en sens contraires, il est clair que si l'on conçoit la plus grande force P décomposée en deux autres, Q et $P - Q$, les deux forces Q, $-Q$, étant égales et directement opposées, se détruiront, et le point d'application ne sera plus sollicité que par la seule force $P - Q$ agissant dans le sens de la force P.

15. En combinant les deux dernières propositions, on en déduit immédiatement ce théorème général :

Théorème. *Un nombre quelconque de forces qui agissent suivant une même droite, et sont dirigées les unes dans un sens, les autres dans le sens opposé, ont une résultante égale à l'excès de la somme des composantes qui tirent dans un sens, sur la somme de celles qui tirent en sens contraire ; et cette résultante agit dans le sens des forces qui ont donné la plus grande somme.*

Car soient P, Q, S, ... les forces qui tirent dans un sens, et P', Q', S',... celles qui tirent en sens contraire; d'après la deuxième proposition, les premières forces auront une résultante $R = P + Q + S +$ etc., qui agira dans le même sens, et les autres auront de même une résultante $R' = P' + Q' + S' +$ etc., qui agira dans leur sens. Donc, d'après la troisième proposition, la résultante de toutes les forces sera $r = R - R'$, et agira dans le sens de la plus grande résultante partielle R. On peut énoncer le même théorème plus simplement, en disant que la résultante d'un nombre quelconque de forces dirigées suivant une même droite, est égale à leur *somme algébrique* ou prise *algébriquement*, c'est-à-dire, en regardant comme affectées du signe + les forces qui tirent dans un sens, et comme affectées du signe — celles qui tirent en sens contraire. Le signe de la somme indiquera dans quel sens agit la résultante. Si la somme est nulle, il en sera de même de

la résultante, et les forces données se feront équilibre.

16. Lorsque plusieurs forces sont appliquées à un point, il est évident qu'il ne peut arriver que deux cas : ou elles se font équilibre, ou elles ont une *résultante unique* (10).

Il suit de là que *deux forces P, Q, appliquées à un point A, et qui se font équilibre, sont directement opposées.*

Car si elles pouvaient former un angle, en appliquant au point A une force — P, égale et directement opposée à la force P, les trois forces P, — P et Q, auraient deux résultantes différentes, savoir : la force Q, puisque les forces P, — P se détruisent, et la force — P, puisque, par hypothèse, les forces P, Q se font équilibre.

SECTION II.

COMPOSITION DES FORCES QUI CONCOURENT EN UN POINT (*).

---

17. Lemme. *Deux forces qui concourent ont une résultante ; cette résultante est située dans le plan de leurs directions, et dans l'intérieur de l'angle qu'elles forment.*

Soient deux forces P, Q, appliquées au point A sous un angle quelconque PAQ. Puisqu'elles ne sont pas di- Fig. 2.

(*) Pour abréger le discours, on est dans l'usage de dire, *forces concourantes*, *forces parallèles*, pour désigner les forces dont les directions concourent ou sont parallèles.

rectement opposées l'une à l'autre, elles ne peuvent se faire équilibre. Donc *elles ont une résultante* (16).

De plus, cette résultante doit être dans le plan des composantes : car il n'y a pas de raison pour qu'elle soit dirigée plutôt en dessus qu'en dessous. Enfin, elle doit être située dans l'angle PAQ des composantes. En effet, si l'on prolonge les droites PA, QA, qui représentent la direction des forces, leur plan sera partagé en quatre espaces angulaires X, Y, Z, U. Or, si le point A était soumis à la seule force P, il serait tiré dans le sens AP, c'est-à-dire qu'il fuirait les espaces X, Y; de même, s'il obéissait à la seule force Q, il fuirait les espaces X, Z. Donc, en vertu de l'action simultanée des deux forces P, Q, le point A doit fuir les espaces X, Y, Z, et, par conséquent, se diriger dans l'intérieur de l'espace angulaire U ou PAQ, qui contiendra donc la résultante des deux forces données.

18. Remarque. *Lorsque les deux composantes P, Q sont égales, la direction de la résultante partage en deux parties égales l'angle PAQ qu'elles forment.*

Car il n'y a pas de raison pour que cette résultante fasse, avec l'une des composantes, un angle plus petit qu'avec l'autre.

19. Corollaire. *Lorsque l'intensité d'une des deux composantes augmente, la résultante se rapproche de la direction de la composante dont l'intensité a augmenté.*

Fig. 3. En effet, soit R la résultante des deux forces P, Q. Si la force P, sans cesser d'agir dans la direction AP, augmente d'une quantité P′ et devient P + P′, il est clair que la résultante R′ des forces P+P′ et Q, ne peut être autre que celle des forces R et P′ dirigées suivant AR et AP′. Donc, cette résultante R′ est située (17) dans l'intérieur de l'angle P′AR, et par conséquent forme, avec la composante AP′, un angle plus petit que P′AR.

Il suit également de là que si l'intensité de l'une des leux composantes diminue, la direction de la résultante loit s'éloigner de cette composante.

20. Théorème fondamental. *La résultante de deux forces quelconques appliquées à un même point, sous un ingle quelconque, est représentée en direction et en intensité par la diagonale du parallélogramme construit sur les droites, qui représentent en direction et en intensité les deux forces données.*

I. Nous allons d'abord faire voir que la résultante des deux forces est dirigée suivant la diagonale du parallélogramme désigné, ce qui constitue la première partie du théorème.

1° Soient P, Q les forces données, représentées en grandeur et en intensité par les droites AB, AF. Supposons l'une des forces un multiple de l'autre, par exemple, la force Q quadruple de la force P. Alors la droite AB sera exactement contenue quatre fois dans la droite AF, de sorte que si l'on divise AF en quatre parties égales, AC, CD, DE, EF, chacune d'elles sera égale à AB, et représentera une force égale à P. Par les points de division, C, D, E, F, menons des parallèles à AP, et par le point B, une parallèle à AQ, tous les points d'intersection A, B, C,....L étant d'ailleurs censés liés d'une manière invariable. Concevons la force Q remplacée par les quatre forces AC, CD, DE, EF, dont chacune est égale à la force P. Appliquons au dernier point d'intersection L une force Q agissant dans le sens LQ, et, en même temps, appliquons à chacun des points G, H, K, L, une force P agissant en sens contraire de la précédente; ces quatre forces seront détruites par la nouvelle force Q, et l'effet ne sera pas troublé. Enfin, appliquons à chacun des mêmes points G, H, K, L, et suivant les droites GC, HD, KE, LF, deux forces égales chacune à P, et agissant en Fig. 4.

sens contraires l'une de l'autre. Ces forces se détruiront deux à deux, et le système ne sera pas troublé.

Cela posé, si l'on combine la force AB ou P avec la force AC ou la première de celles qui ont remplacé la force Q, et qui est aussi égale à P, leur résultante sera dirigée (18) suivant la diagonale AG du losange ABCG, laquelle partage l'angle BAC en deux parties égales. De même, les forces GB, GC, dont chacune est égale à P, auront une résultante GA parfaitement égale à la première, et aussi dirigée suivant la même diagonale GA du losange ABCG. Mais il est clair que ces deux résultantes AG, GA sont directement opposées, et, par conséquent, doivent se détruire. Donc, les quatre forces AB, AC, GB, GC, dont elles tiennent lieu, et qui agissent deux à deux aux sommets opposés A, G du losange ABCG, se détruiront complétement, et il ne restera que la force P appliquée au point G suivant GP, ou, ce qui revient au même, puisque tous les points du système sont liés invariablement, appliquée au point C suivant la droite CG qui la représente. On a d'ailleurs la force Q appliquée au point L, et agissant dans le sens LQ. Passant alors au losange suivant CGHD, on répétera exactement le même raisonnement : la résultante des deux forces CG, CD, détruira celle des deux forces HG, HD, et, par conséquent, les quatre forces en question se détruiront complétement. Il ne restera donc au point H que la force P agissant suivant HP, ou, ce qui revient au même, la force DH ou P appliquée au point D, et d'ailleurs la force Q appliquée au point L. Passant au losange suivant DHKE, il en sera encore de même; les quatre forces DH, DK, HK, HE se détruiront, et il ne restera que la force P appliquée au point K ou au point E. Enfin, il en sera encore de même dans le dernier losange, de sorte que de toutes les forces du système, il ne restera définitivement que les deux

forces P, Q appliquées au point L. Donc la résultante des forces P, Q passera par ce point; mais elle doit aussi passer par le point primitif d'application A, puisqu'elle doit solliciter ce point absolument de la même manière que les forces P, Q. Donc, elle sera dirigée suivant la diagonale AL du parallélogramme ABLF construit sur les droites AB, AF, qui représentent les forces P, Q.

2° Supposons maintenant que les forces P, Q, sans être multiples l'une de l'autre, soient dans un rapport commensurable, celui de 3 à 7, par exemple; de sorte qu'en appelant f l'unité de force, on ait P ou AB $=$ 3f, Fig. 5.
et Q ou AF $=$ 7f. Achevons le parallélogramme ABLF, et par les points B′, B″, qui partagent AB en trois parties égales, menons à AF les parallèles B′F′, B″F″. Si l'on combine la force AB′ ou f, première partie de la force P, avec la force Q, la résultante sera dirigée, d'après ce qu'on vient de voir, suivant la diagonale AF′ du parallélogramme AB′F′F. Tous les points du système étant censés liés invariablement, on peut donc appliquer au point F′, extrémité de la diagonale AF′, la force AB′ ou f, et la force AF ou Q, ce qui permettra de supprimer le premier parallélogramme partiel. Combinons maintenant la force B′B″ ou f, deuxième partie de P, avec la force Q appliquée en F′, et qu'on peut transporter au point B′ situé sur sa direction, leur résultante sera dirigée suivant la diagonale B′F″ du second parallélogramme partiel B′B″F″F′, et les composantes B′B″, B′F′, ou f, Q, pourront s'appliquer au point F″, extrémité de la diagonale B′F″, ce qui permettra de supprimer le deuxième parallélogramme partiel. Enfin, combinant de même la force B″B ou f, troisième partie de P, avec la force Q transportée au point B″ de sa direction, leur résultante sera dirigée suivant la diagonale B″L du troisième parallélogramme partiel, et les deux composantes pourront

s'appliquer au point L. On aura donc en ce point la force entière Q, plus la force P provenant de la somme de ses trois parties appliquées tout à l'heure en F', F'', L, et qu'on peut réunir au point L. Par conséquent, la résultante des forces P, Q devra passer par le point L; mais elle doit aussi passer par le point A : donc, elle sera dirigée suivant la diagonale AL du parallélogramme ABLF.

Fig. 6. 3° Supposons, enfin, que les forces P, Q, toujours représentées par les droites AB, AF, ne soient plus dans un rapport commensurable. Il s'agit de montrer que leur résultante doit encore être dirigée suivant la diagonale AL du parallélogramme ABLF. En effet, supposons que la résultante, au lieu de rencontrer le côté BL au point L, aille couper sa direction en un point C plus éloigné du point B que le point L. Achevons le parallélogramme ABCD. Si l'on conçoit qu'on divise AB en parties égales plus petites que FD, en portant ces parties égales sur AD, il y aura au moins un point I de division entre F et D, et les droites AB, AI, seront dans un rapport commensurable, ainsi que les forces qu'elles représentent. Donc, d'après ce qu'on vient de voir, leur résultante sera dirigée suivant la diagonale AH du parallélogramme ABHI, laquelle fait avec AQ un angle QAH plus grand que l'angle QAC. Mais la force AI étant plus grande que la force AF, la résultante AH des forces AI, AB, devrait (19) être plus rapprochée de AF que la résultante AC des forces AF, AB. Comme, au contraire, elle en est plus éloignée, il s'ensuit que l'hypothèse d'où l'on est parti est fausse, et que la résultante des forces P, Q ne peut rencontrer la direction du côté BL en un point C plus éloigné du point B que le point L.

On démontrerait, par un raisonnement tout à fait analogue, qu'elle ne peut rencontrer BL en un point plus rapproché du point B que le point L. Donc, la résul-

tante des forces P, Q passe par le point L, c'est-à-dire *qu'elle est dirigée suivant la diagonale du parallélogramme construit sur les droites qui représentent les deux forces en direction et en intensité.*

REMARQUE. Ainsi, étant données deux forces P, Q, appliquées au point A et représentées par les droites AB, AC, on obtient la direction de leur résultante R en menant la diagonale AD du parallélogramme construit sur AB et sur AC. Fig. 7.

Réciproquement, *étant données les directions AP, AQ, AR, de deux forces P, Q et de leur résultante R, on peut déterminer le rapport des composantes P, Q.* Car il suffit de mener, par un point quelconque D de la direction AR, deux parallèles, l'une DB à AQ, l'autre DC à AP. Alors il est clair que le rapport des lignes AB, AC doit être celui des composantes P, Q, et qu'ainsi l'on doit avoir la proportion P : Q : : AB : AC. Car si l'on avait P est à Q comme AB est à une ligne AI plus grande ou plus petite que AC, la résultante des deux forces P, Q serait dirigée suivant la diagonale AK d'un parallélogramme ABKI différent du parallélogramme ABCD.

II. Passons maintenant à la seconde partie du théorème, savoir : que la résultante de deux forces P, Q, représentées en direction et en intensité par les droites AB, AC, est représentée en intensité par la diagonale AD du parallélogramme ABCD construit sur ces forces. Fig. 8.

Nous savons déjà que cette résultante R est dirigée suivant la diagonale AD. Supposons qu'elle soit appliquée, en sens contraire de son action, au point A sur le prolongement AK de DA, et désignons-la par R′ dans cette nouvelle situation. Les trois forces P, Q, R′ se feront équilibre au point A, et par conséquent l'une d'elles, la force Q, par exemple, sera égale et directement opposée à la résultante des deux autres P, R′.

Cette résultante sera donc dirigée suivant le prolongement AI de QA. Or si, par le point B, on mène à la direction AK la parallèle BI qui rencontre en I le prolongement de QA, et si, par le point I, l'on mène à la direction AP la parallèle IK qui rencontre en K la direction AK de R′, les deux forces P et R′ ou R seront entre elles, d'après la remarque précédente, comme les côtés AB, AK du parallélogramme ABIK, et l'on aura la proportion P : R :: AB : AK. Donc, puisque AB représente l'intensité de la force P, AK représentera celle de la force R. Mais la figure ABIK étant un parallélogramme, on a BI = AK; et comme AI, prolongement de AQ, est parallèle à BD, il est clair que la figure IBDA est aussi un parallélogramme. Donc BI = AD, et par suite AD = AK. Donc *la diagonale* AD *représente en intensité la résultante* R *des deux forces* P, Q.

21. Corollaire I. Il résulte de ce théorème que toutes les questions, qu'on peut proposer sur la composition de deux forces en une seule et sur la décomposition d'une force en deux autres, se ramènent à la résolution d'un
Fig. 9. triangle. Car les trois forces P, Q, R étant entre elles comme les trois lignes AB, AC, AD, et le parallélogramme ABCD donnant BD = AC, il est clair que ces trois forces sont entre elles comme les trois côtés AB BD, AD du triangle ABD. De plus, à cause de l'angle BDA = DAC, les trois angles de ce triangle sont ceux que forme la résultante avec chacune des composantes, et le supplément de l'angle compris entre les composantes. Or, un triangle étant déterminé par trois de ses six parties, pourvu qu'il se trouve au moins un côté au nombre des parties connues, on voit qu'étant données trois des six quantités suivantes, les trois forces P, Q, R, et les trois angles compris entre leurs directions, on pourra déterminer les trois autres, en résolvant le triangle

ABD, pourvu que l'intensité de l'une des forces soit au nombre des quantités données.

On voit, en outre, que *deux quelconques des trois forces* P, Q, R, *sont entre elles en raison inverse des sinus des angles formés par leurs directions avec celle de la troisième force.*

Car le triangle ABD donne

$$AB : BD : AD :: \sin ADB : \sin BAD : \sin ABD,$$

ou bien

$$P : Q : R :: \sin DAC : \sin BAD : \sin BAC.$$

Cette propriété peut également s'énoncer, en disant que *chacune des trois forces* P, Q, R, *est comme le sinus de l'angle formé par les directions des deux autres.*

Elle s'applique encore à trois forces P, Q, R′, en équilibre autour d'un point; car l'une d'entre elles R′ doit être égale et directement opposée à la résultante R des deux autres P, Q; et d'ailleurs les sinus des angles supplémentaires sont égaux.

22. Corollaire II. Il résulte aussi du même théorème *qu'on peut toujours décomposer une force donnée en deux autres, seulement données en direction, pourvu que les trois directions soient dans un même plan et concourent en un même point.*

Car, soient AR, AP, AQ, les directions de la force donnée R et des deux forces inconnues P, Q. Si l'on prend sur AR une certaine portion AD qui représente l'intensité de la force R, et qu'on mène par le point D les parallèles DB à AQ, DC à AP, on formera un parallélogramme ABCD, dont les côtés AB, AC représenteront les forces P, Q. Fig. 9.

La grandeur de ces forces se calcule immédiatement par les proportions du corollaire précédent.

Le théorème du parallélogramme des forces offre de fréquentes applications dans la pratique. Par exemple, un bateau étant attelé d'un côté par trois chevaux dans
Fig. 10. la direction BC, et de l'autre côté par deux chevaux, si l'on demande quelle direction il faut donner à ces deux chevaux pour que le bateau suive le courant BT, il suffit de décrire du point C comme centre, avec un rayon égal à CA représentant la force de deux chevaux, un arc de cercle qui coupe le courant BT au point A, et d'achever le parallélogramme BCAD. Le côté BD sera la direction demandée (*).

23. Remarque I. *Lorsque les directions des deux forces, dans lesquelles on décompose une force donnée, sont à angle droit, chaque composante égale le produit de la force proposée par le cosinus de l'angle qu'elle forme avec la direction de cette composante.*

Car, si dans les proportions du corollaire I (21) on
Fig. 9. suppose l'angle BAC droit et le rayon $=1$, ce qui donne $\sin BAC = 1$, $\sin DAC = \cos BAD$, et $\sin BAD = \cos DAC$, il vient

$$P : R :: \cos BAD : 1, \quad Q : R :: \cos DAC : 1,$$

d'où $P = R . \cos BAD$, et $Q = R . \cos DAC$; ce qu'on énonce en disant que *chaque composante est représentée par la projection de la résultante sur sa direction*, ou

(*) Le nageur emploie à son insu le même théorème. En agissant du pied droit, il donne une impulsion qui le rejette vers la gauche; en agissant du pied gauche, il donne une impulsion qui le rejette vers la droite : de sorte qu'en agissant des deux pieds à la fois, il suit la diagonale, qui est dans la direction de son corps.

Il en est de même des grenouilles quand elles nagent, et des oiseaux quand ils volent.

souvent encore que chaque composante, P par exemple, est la résultante *estimée* suivant la direction AP.

Dans le même cas on a $R^2 = P^2 + Q^2$, d'où

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2},$$

ce qui détermine l'intensité de la résultante en fonction des composantes.

24. Remarque II. *Deux forces appliquées à un même point, sous un angle non égal à deux droits, ne peuvent donner une résultante nulle, à moins que chacune d'elles ne soit nulle en particulier.*

Car lorsque les deux forces ne sont pas nulles, on peut toujours construire, sur les deux lignes qui les représentent en direction et en intensité, un parallélogramme, dont la diagonale est la résultante des deux forces données.

Lorsqu'une seule des deux forces est nulle, l'autre force est la résultante.

Donc la résultante ne peut être nulle que dans le seul cas où les composantes sont toutes deux nulles à la fois.

25. Théorème. *Trois forces appliquées à un même point, et représentées en direction et en intensité par trois droites non situées dans un même plan, ont toujours une résultante qui est représentée en direction et en intensité par la diagonale du parallélipipède construit sur ces trois droites.*

Soient les trois forces P, Q, S, appliquées au point A, Fig. 11.
et représentées par les droites AB, AC, AD. Construisons sur ces droites le parallélipipède AF. Les forces AB, AD auront pour résultante la diagonale AE du parallélogramme ABED (20). Mais à cause de AC égal et parallèle à EF, la figure AEFC est un parallélogramme; donc les forces AE, AC auront une résultante repré-

sentée par la diagonale AF, qui est en même temps celle du parallélipipède AF. Donc AF représentera la résultante des trois forces P, Q, S.

26. Corollaire I. *On peut toujours décomposer une force donnée en trois autres respectivement parallèles à trois droites données dans l'espace, mais dont deux ne sont point parallèles.*

Fig. 11. Car soit AF l'intensité de la force donnée R; menons par le point d'application A les droites AB, AC, AD, respectivement parallèles aux trois droites données, et par le point F menons trois plans respectivement parallèles aux plans déterminés par les droites AB, AC, AD, on aura un parallélipipède AF, dont trois arêtes contiguës AB, AC, AD seront les composantes de la résultante AF ou R.

27. Corollaire II. *Lorsque les directions de trois forces forment entre elles des angles droits, le carré de la résultante est égal à la somme des carrés des composantes.*

Car le parallélipipède AF devenant rectangle, les triangles ADE, AEF sont également rectangles en D et en E; on a donc

$$\overline{AE}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DE}^2, \quad \overline{AF}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{EF}^2,$$

d'où

$$\overline{AF}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DE}^2 + \overline{EF}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{AD}^2,$$

ou bien

$$R^2 = P^2 + Q^2 + S^2,$$

et par suite

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + S^2}.$$

On peut, comme au n° 23, exprimer les trois composantes en fonction de la résultante et des angles qu'elles forment avec sa direction. Car si l'on désigne par α l'angle

FAB que la résultante R fait avec la composante P, en menant la droite FB on formera un triangle ABF qui sera rectangle en B et donnera $1 : \cos\alpha :: R : P$, d'où

$$P = R \cos \alpha.$$

Si de même on désigne par β et γ les angles que fait la résultante R avec les composantes Q, S, on trouvera pareillement $Q = R \cos \beta$, $S = R \cos \gamma$.

28. Remarque. *Trois forces appliquées à un même point, et non situées dans un même plan, ne peuvent donner une résultante nulle, à moins que chacune d'elles ne soit nulle en particulier.*

Car lorsque les trois forces ne sont pas nulles, on peut toujours construire, sur les trois lignes qui les représentent, un parallélipipède dont la diagonale est la résultante des trois forces données.

Lorsqu'une seule des trois forces est nulle, les deux autres, qui, par hypothèse, ne sont pas en ligne droite, ont une résultante.

Lorsque deux des trois forces sont nulles, la troisième est la résultante.

La résultante ne peut donc être nulle que dans le seul cas où les composantes sont toutes trois nulles à la fois.

29. Problème. *Déterminer la résultante d'un nombre quelconque de forces appliquées à un même point et dirigées d'une manière quelconque dans l'espace?*

Soient P, Q, S, T,....Z les forces données. On prendra d'abord deux quelconques d'entre elles, P, Q, par exemple, et comme elles sont dans un même plan, on saura déterminer leur résultante R (20). Le système des forces proposées sera donc remplacé par celui des forces R, S, T,....Z, dont le nombre est moindre d'une unité: On prendra de même la résultante R_1 des deux

forces R, S, et les forces proposées seront remplacées par les forces R_1, T,....Z, dont le nombre est moindre de deux unités. En continuant à composer ainsi de proche en proche deux forces en une seule, on parviendra nécessairement à une force unique R_n, qui sera la résultante des forces proposées.

30. Remarque I. Si toutes les forces données sont dans un même plan, il est clair que les résultantes successives, et par conséquent la résultante finale, seront aussi dans le même plan.

31. Remarque II. Dans la pratique on peut se dispenser de construire en entier les parallélogrammes successifs, et même de mener leurs diagonales.

Car si l'on veut d'abord composer en une seule les
Fig. 12. deux forces P, Q, représentées par les lignes AB, AC, il suffit de mener par l'extrémité B de l'une d'elles la parallèle BD à l'autre force AC, et de prendre BD = AC. Il est évident que le point D déterminera en direction et en intensité la résultante cherchée.

D'après cela, si l'on a, par exemple, cinq forces, repré-
Fig. 13. sentées par les lignes AB, AC, AD, AE, AF, on mènera par l'extrémité B de l'une quelconque d'entre elles, une ligne BC' égale et parallèle à AC; de même on mènera par le point C' une ligne C'D' égale et parallèle à AD, par le point D' une ligne D'E' égale et parallèle à AE, enfin par le point E' une ligne E'F' égale et parallèle à AF; la droite AF', menée du point d'application au dernier point F' ainsi obtenu, sera évidemment la résultante des cinq forces proposées, laquelle agit dans le sens AF'.

Lorsque la parallèle E'F' à la dernière des forces proposées vient aboutir au point d'application A, le contour polygonal ABC'D'E'F' se ferme de lui-même, et la résultante AF' se réduit à zéro, c'est-à-dire que les forces données se font équilibre.

De là résulte la proposition suivante :

Si l'on décrit dans l'espace un contour polygonal dont les côtés successifs soient respectivement parallèles et proportionnels à des forces données agissant sur un même point, le dernier côté de ce contour est parallèle et proportionnel à la résultante de toutes les forces ; de sorte que si le polygone se ferme de lui-même, la résultante est nulle, et les forces proposées sont en équilibre autour de leur point d'application.

32. Remarque générale. Dans tout ce qui précède, on a supposé les forces appliquées à un même point de l'espace; mais les propositions démontrées ont encore lieu lorsque les forces sont appliquées à différents points d'un corps, pourvu que leurs directions, prolongées s'il est nécessaire, concourent en un même point. Car on peut, sans altérer l'effet des forces, transporter leurs points d'application au point de concours.

Par conséquent, *si plusieurs forces ont des directions qui concourent en un point, ou bien elles ont une résultante unique, ou bien elles se font équilibre.*

Dans ce dernier cas, chaque force est égale et directement opposée à la résultante de toutes les autres. Lorsque les forces données ont une résultante unique, on leur fait équilibre en appliquant au point de concours une force égale et directement opposée à la résultante.

SECTION III.

COMPOSITION DES FORCES PARALLÈLES.

---

33. Théorème. *Lorsque deux forces parallèles, agis-*

sant dans le même sens, sont appliquées à deux points liés entre eux d'une manière invariable, 1° ces forces ont toujours une résultante unique, parallèle à leur direction, égale à leur somme et agissant dans le même sens; 2° la direction de cette résultante divise la droite qui joint les points d'application, en deux parties réciproquement proportionnelles aux intensités des composantes.

Fig. 14. Soient les deux forces parallèles P, Q, appliquées l'une au point A, l'autre au point B d'une droite rigide AB, et représentées par les lignes AC, BD.

1° Prenons des deux côtés de AB, et sur son prolongement, deux longueurs égales A*a*, B*b*, pour représenter deux forces égales et contraires. La force AC ou P pourra se décomposer en deux forces, l'une A*a*, l'autre A*c*, déterminée en intensité et en direction par le côté A*c* du parallélogramme A*a*C*c*, construit sur A*a* comme côté, et sur AC comme diagonale. De même la force BD ou Q pourra se décomposer dans les deux forces B*b*, B*d*, représentées par les côtés du parallélogramme B*b*D*d*. Or les deux forces A*a*, B*b* se font équilibre, puisque leurs points d'application A, B sont invariablement liés entre eux. Donc le système des deux forces P, Q pourra se remplacer par celui des deux forces A*c*, B*d*, qui, étant situées entre les parallèles AC, BD, avec lesquelles chacune a un point commun, doivent nécessairement se rencontrer en un point O, compris entre les mêmes parallèles. Par conséquent, si l'on suppose le point O lié invariablement avec les points A et B, on pourra le prendre pour point d'application commun aux deux forces A*c*, B*d*, qui viendront en O*c'* et O*d'*. Menons maintenant par le point O une parallèle *a'b'* à AB, et appliquons au point O, suivant cette parallèle, deux forces contraires O*a'*, O*b'* égales entre elles et aux forces A*a*, B*b*, l'effet des deux forces O*c'*, O*d'* ne sera pas

troublé. Nous aurons donc alors les quatre forces Oa', Oc', Ob', Od', respectivement égales aux quatre forces primitives Aa, Ac, Bb, Bd, et parallèles à ces forces ou de même direction, mais appliquées au même point O. Par conséquent les deux forces Oa', Oc' auront une résultante OC$'$ égale et parallèle à la force AC ou P, et agissant dans le même sens; de même les deux forces Ob', Od' auront une résultante OD$'$ égale et parallèle à BD ou Q. Ainsi le système des deux forces données P, Q se trouve remplacé par celui des deux forces OC$'$, OD$'$, qui, ayant la même direction, peuvent se composer en une seule force R égale à OC$' +$ OD$'$ ou à P + Q.

Donc, 1° *les deux forces proposées* P, Q *ont une résultante* R *unique, parallèle à leur direction, égale à leur somme, et agissant dans le même sens que ces forces.*

2° Pour déterminer le point L, où la direction de la résultante rencontre la droite AB, nous remarquerons que les triangles aAC, bBD étant respectivement semblables aux triangles ALO, BLO, on a les proportions

$$aA : AL :: AC \text{ ou } P : LO \qquad (1)$$
$$LB : Bb :: LO : BD \text{ ou } Q$$

ou bien, à cause de B$b = a$A,

$$LB : aA :: LO : Q \qquad (2)$$

Multipliant les proportions (1) et (2) terme à terme, il vient

$$LB : AL :: P : Q.$$

Donc, 2° *la direction de la résultante* R *divise la droite* AB, *qui joint les points d'application* A, B *des composantes, en deux parties* AL, LB, *réciproquement proportionnelles aux intensités des composantes* P, Q.

34. Corollaire I. *Les directions de deux forces parallèles de même sens et de leur résultante étant rencontrées par une droite quelconque donnée de position, cha-*

cune des trois forces est proportionnelle à la portion de la droite comprise entre les deux autres.

[Fig. 15.] Car soient les deux forces P, Q et leur résultante R, dont les directions sont rencontrées aux points A, B, L, par la droite AB, on aura (33, 2°) la proportion

$$P : Q :: LB : AL,$$

d'où

$$P : P + Q :: LB : AL + LB,$$

ou

$$P : R :: LB : AB.$$

On a de même

$$Q : R :: AL : AB.$$

Ce corollaire n'est qu'un autre énoncé de la seconde partie du théorème.

35. Corollaire II. Les six quantités P, Q, R, AL, LB, AB, étant liées entre elles par les trois équations

$$(1) \qquad R = P + Q,$$
$$(2) \qquad AB = AL + LB,$$
$$(3) \qquad P . AL = Q . LB,$$

il est clair qu'on pourra déterminer trois d'entre elles, lorsqu'on connaîtra les trois autres, *pourvu que les trois quantités connues ne soient pas, ou les trois intensités* P, Q, R, *ou les trois distances* AL, LB, AB; car dans l'un et l'autre cas, les trois équations ci-dessus, se réduisant réellement à deux, ne donneraient que les rapports des trois quantités inconnues.

Si l'on donne, par exemple, P, Q, LB, on aura, par les trois équations précédentes,

$$P = R - Q,$$
$$AL = \frac{Q . LB}{R - Q},$$
$$AB = AL + LB.$$

6. Théorème. *Lorsque deux forces inégales et paral-*

lèles, agissant en sens contraires, sont appliquées à deux points liés entre eux d'une manière invariable, 1° ces forces ont une résultante unique, parallèle à leur direction, égale à leur différence, et agissant dans le sens de la plus grande ; 2° la direction de cette résultante rencontre le prolongement de la droite qui joint les points d'application des composantes en un point dont les distances aux points d'application des composantes sont réciproquement proportionnelles à leurs intensités.

Soient les deux forces parallèles P, Q, dont la plus grande est P, et soient A, B leurs points d'application. Fig. 16.

1° Décomposons (33) la force P en deux autres parallèles à sa direction, l'une Q' égale à Q et appliquée au point B, l'autre P — Q appliquée au point inconnu L du prolongement de AB. La distance AL de ce point au point A sera donnée (34) par la proportion

$$Q : R \text{ ou } P - Q :: AL : AB,$$

d'où

$$AL = \frac{AB . Q}{P - Q}.$$

On pourra donc remplacer le système des forces P, Q, par celui des forces P — Q, Q, Q'. Or les forces Q, Q' étant égales et directement opposées, se détruisent, et il ne reste plus que la force P — Q appliquée au point L. Donc les deux forces données P, Q ont une résultante R égale à leur différence, et agissant dans le sens de la plus grande composante.

2° La direction de la résultante doit rencontrer le prolongement de AB en un point L, tel que l'on ait AL : AB :: Q : R, d'où AL + AB : AL :: Q + R : Q, ou, ce qui revient au même, LB : LA :: P : Q (*).

On a aussi LB : AB :: P : R.

(*) La même proposition peut s'établir directement par une

37. Corollaire. Les six quantités P, Q, R, AL, BL, AB, étant liées entre elles par les trois équations

$$(1)\qquad R = P - Q,$$
$$(2)\qquad AB = BL - AL,$$
$$(3)\qquad P.AL = Q.BL,$$

il est clair qu'on pourra déterminer trois d'entre elles, lorsqu'on connaîtra les trois autres, pourvu que les trois quantités connues ne soient pas, ou les trois intensités P, Q, R, ou les trois distances AL, BL, AB; car, dans l'un et l'autre cas, les trois équations ci-dessus, se réduisant réellement à deux, ne donneraient que les rapports des trois quantités inconnues.

38. Remarque I. On peut réunir les équations des n°s 35 et 37 au moyen du double signe $\pm$, ce qui donne les trois suivantes

---

démonstration absolument conforme à celle que nous avons donnée pour le théorème n° 33, et qu'on peut même suivre sur la figure 17, où nous avons indiqué les mêmes lettres. Il restera seulement à faire voir que les forces auxiliaires Ac, Bd doivent nécessairement se rencontrer. En effet, si sur Ac on prend Aγ = BD et qu'on achève le parallélogramme A$a\gamma\alpha$, les triangles A$\gamma\alpha$, DBb seront égaux et semblablement placés; donc l'angle $\gamma\alpha$A, ou son égal aAα', égalera l'angle BbD ou ABd. Ainsi les lignes Aα', Bd sont parallèles, et par conséquent Bd rencontre en un point O la droite cA prolongée au-dessous de AB. On fera voir, comme dans la démonstration citée, que le système des forces données P, Q peut se remplacer par celui des deux forces OC', OD', qui, ayant la même direction et agissant en sens contraires, ont une résultante R = P — Q.

Prolongeant la direction OC' jusqu'à sa rencontre avec la droite AB au point L, on formera les triangles OLA, OLB, qui seront respectivement semblables aux triangles aAC, bBD, et l'on en déduira, comme plus haut (33, 2°), LB : LA :: P : Q.

(1) $R = P \pm Q$,

(2) $AB = BL \pm AL$,

(3) $P.AL = Q.BL$,

au moyen desquelles on peut résoudre toutes les questions relatives à la composition et à la décomposition de deux forces parallèles agissant dans le même sens ou en sens contraires, pourvu que, dans ce dernier cas, les deux composantes soient inégales.

39. Remarque II. *Lorsque les deux composantes* P, Q *sont égales, la résultante devient nulle*, et *la distance de son point d'application*, qui est donnée (36) par la formule $AL = \frac{AB.Q}{P-Q}$, *devient infinie*. Ce résultat signifie que *le système de deux forces parallèles, égales et de sens contraires, ne peut être remplacé par une force unique*. La figure 17 montre, en effet, que les deux parallélogrammes $AaCc$, $BbDd$, dont les forces P, Q sont les diagonales, deviennent égaux, le premier se confondant alors avec $Aa\gamma\alpha$, dont la diagonale $A\gamma = BD$, et dont le côté $A\alpha$ est parallèle à Bd; par conséquent le système des deux forces parallèles proposées $A\gamma$, BD se transforme, non plus en deux forces Ac, Bd concourantes au point O, mais en deux forces $A\alpha$, Bd, parallèles, égales et contraires, comme les forces proposées.

Au reste, ce cas particulier constituant l'un des principes les plus importants de la Statique, nous allons le démontrer directement.

40. Principe. *Deux forces parallèles, égales et contraires, n'ont pas de résultante unique*, c'est-à-dire *qu'une seule force ne peut leur faire équilibre.*

Car soient P, —P, les forces données; supposons Fig. 18. qu'elles puissent avoir une résultante R située d'une manière quelconque, et appliquée en un point C. Joignons le point C et le milieu L de AB par la droite CL que nous

prolongerons d'une quantité LD = CL, et appliquons au point D une force — R égale à R, parallèle et contraire. Il est évident que tout sera semblable de part et d'autre de la ligne AB, et que les forces P, — P ne pourront avoir une résultante R, sans que les mêmes forces admettent aussi pour résultante la force — R, située à l'égard des forces — P, P, comme R l'est par rapport à P, — P. Or une force R′, égale et directement opposée à R, faisant équilibre aux forces proposées P, — P, devrait aussi faire équilibre à leur résultante — R; ce qui est impossible, puisque les deux forces R′, — R, parallèles et agissant dans le même sens, ont toujours une résultante égale à leur somme (33).

L'ensemble de deux forces P, — P, égales, parallèles et contraires, mais non appliquées au même point, se nomme *couple*. Donc, *un couple n'a pas de résultante*, c'est-à-dire *qu'une force unique ne peut lui faire équilibre*.

41. COROLLAIRE. Il résulte de ce principe que *deux forces quelconques, non directement opposées l'une à l'autre, ne peuvent jamais se faire équilibre.*

Fig. 19. Car si les deux forces P, Q pouvaient se faire équilibre, en appliquant au point B deux forces contraires S, S′, égales et parallèles à P, les quatre forces P, Q, S, S′ se feraient encore équilibre. Or les forces Q, S′ ont une résultante R (20); donc une force unique R ferait équilibre au couple P, S, ce qui est impossible, comme on vient de le voir.

42. PROBLÈME. *Déterminer la résultante d'un nombre quelconque de forces parallèles, appliquées aux différents points d'un système quelconque de figure invariable?*

I. Supposons d'abord que toutes les forces données

Fig. 20. P, P′, P″, P‴...... agissent dans le même sens. Deux quelconques P, P′ d'entre elles étant situées dans un même plan, on pourra (33) prendre leur résultante

$= P + P'$, et déterminer son point d'application L en divisant AB en deux parties réciproquement proportionnelles aux forces P, P'. De même, les deux forces r, P'' auront une résultante $r' = r + P'' = P + P' + P''$, et l'on déterminera son point d'application L' en divisant la droite menée du point L au point C en deux parties réciproquement proportionnelles aux forces r, P''. Les forces r', P''' auront pareillement une résultante $r'' = r' + P''' = P + P' + P'' + P'''$, dont le point d'application L'' divisera la droite L'D en deux parties réciproquement proportionnelles aux forces r', P'''; ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ait épuisé toutes les forces données. Par conséquent, ces forces auront une résultante $R = P + P' + P'' + P''' +$ etc., dont le point d'application K divisera la droite joignant ceux de l'avant-dernière résultante partielle et de la dernière composante en deux parties réciproquement proportionnelles à ces deux forces.

II. Supposons maintenant que, parmi les forces parallèles données, les unes agissent dans un sens, et les autres dans le sens opposé. On prendra, comme on vient de le voir, la résultante r de celles qui agissent dans un même sens, et la résultante r' de toutes celles qui agissent dans le sens opposé. Le système proposé sera donc réduit à deux forces r, r', parallèles et de sens contraires. Cela posé,

1° Si les deux forces r, r' sont inégales, elles auront une résultante R parallèle à leur direction, égale à leur différence, et agissant dans le sens de la plus grande. Alors R sera la résultante du système proposé.

2° Si les deux forces r, r' sont égales et directement opposées, la résultante est nulle, et les forces données se font équilibre.

3° Si les deux forces r, r' sont égales, sans être direc-

tement opposées, le système n'a pas de résultante unique, mais se réduit au couple déterminé par les deux résultantes partielles.

43. COROLLAIRE I. Il suit de là que *la résultante d'un nombre quelconque de forces parallèles est égale à l'excès de la somme des composantes qui tirent dans un sens sur la somme de celles qui tirent dans le sens contraire*, c'est-à-dire qu'elle est égale à la somme *algébrique* de toutes les forces données.

Lorsque cette somme n'est pas nulle, les deux résultantes partielles r, r' sont inégales; et, par conséquent, le système proposé a une résultante unique. Mais quand la même somme est nulle, le système est en équilibre ou se réduit à un couple, suivant que les deux résultantes partielles sont ou ne sont pas directement opposées.

44. COROLLAIRE II. *Si des forces parallèles et de même sens tournent en même temps autour de leurs points d'application, en conservant leurs intensités et leur parallélisme, les résultantes générales, qu'on trouvera dans chaque position du système, passeront toutes par un même point.*

Car d'après la construction indiquée (42, fig. 20), la résultante de toutes les forces parallèles P, P', P'', etc., doit évidemment, quelle que soit la position du système, s'appliquer au point K, dont la détermination ne dépend en aucune manière de la direction des composantes, et qui reste ainsi la même quand cette direction vient à changer.

Ce point remarquable, par lequel passent toutes les résultantes successives, se nomme le *centre des forces parallèles*. Sa considération est d'une grande importance dans toutes les questions relatives à l'équilibre des corps pesants (132).

Lorsque tous les points d'application des forces données sont dans un même plan, il résulte de la nature du

centre des forces parallèles, que ce point, s'il existe, doit aussi se trouver dans le même plan.

SECTION IV.

COMPOSITION DES FORCES DIRIGÉES D'UNE MANIÈRE QUELCONQUE DANS UN PLAN.

45. LEMME. *Lorsque trois forces au moins sont dirigées d'une manière quelconque dans un plan, et appliquées à des points liés entre eux d'une manière invariable, deux d'entre elles ont toujours une résultante unique.*

En effet, deux forces situées dans un même plan n'ont pas de résultante dans le seul cas où elles sont parallèles, égales et de sens contraires. Mais si l'une des trois forces que l'on considère est égale, parallèle et de sens contraire à chacune des deux autres, celles-ci doivent nécessairement agir dans le même sens, et, par conséquent, avoir une résultante; ce qui démontre le principe énoncé.

46. THÉORÈME. *Un nombre quelconque de forces dirigées, comme on voudra, dans un même plan, et appliquées à des points liés entre eux d'une manière invariable, peuvent toujours se réduire à une résultante unique ou à un couple, à moins qu'elles ne se fassent équilibre.*

En effet, parmi les forces données, on pourra toujours (45) en prendre deux qui ne soient pas à la fois égales, parallèles et de sens contraires; on saura donc les composer en une seule, et le système proposé sera remplacé par un autre système ayant une force de

moins. Si ce nouveau système a plus de deux forces, on pourra de même en choisir deux qui ne donnent pas de couple, et l'on déterminera leur résultante; ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ait remplacé le système proposé par deux forces P, Q.

Maintenant il peut se présenter trois cas :

1° *Si les forces P, Q ne sont pas à la fois égales, parallèles et de sens contraires, elles auront une résultante unique, qui sera celle du système proposé.*

2° *Si les forces P, Q sont égales, parallèles et de sens contraires, le système proposé donnera lieu à un couple.*

3° *Si les forces P, Q sont égales et directement opposées, les forces données se feront équilibre,* et réciproquement.

47. Remarque. Lorsque les forces proposées ont une résultante, on peut toujours leur faire équilibre au moyen d'une seule force égale et directement opposée à cette résultante.

Donc réciproquement, si une seule force fait équilibre aux forces proposées, celles-ci ont nécessairement une résultante égale et directement opposée à la force qui leur fait équilibre. D'où il suit que, *lorsqu'une force fait équilibre à plusieurs autres situées dans un plan, elle doit également se trouver dans le même plan.*

48. Théorème. *Lorsque trois forces se font équilibre, leurs directions sont nécessairement* 1° *dans un même plan,* 2° *parallèles ou concourantes en un même point.*

Fig. 21. Soient les forces P, Q, R, représentées par les droites AB, CD, EF, et se faisant équilibre.

1° Si ces trois droites n'étaient pas situées dans un même plan, on pourrait évidemment les couper par un plan tel que les trois points d'intersection ne fussent pas en ligne droite. Il s'agit donc de démontrer qu'un plan

quelconque MN rencontre les lignes AB, CD, EF, en trois points A, C, E, toujours en ligne droite.

A cet effet, concevons les forces P, Q, R, appliquées aux points d'intersection A, C, E, prenons à volonté un point G situé hors du plan MN, et menons les droites AG, CG, EG. On pourra décomposer chacune des trois forces P, Q, R en deux autres, de manière que les premières composantes p, q, r soient situées dans le plan MN, et que les secondes composantes p', q', r' soient dirigées suivant AG, EG, CG; par exemple, pour trouver les composantes p, p' de P, on mènera par le point B la parallèle Bb à AG, laquelle parallèle rencontre le plan MN au point b, ce qui donnera la composante Ab ou p, et l'on aura la composante p' en prenant sur AG une longueur Ab'=Bb; on déterminera de même les composantes de Q et de R. Maintenant comme, par hypothèse, les forces P, Q, R se font équilibre, il faut que chacun des systèmes de leurs composantes soit séparément en équilibre; car si le système p', q', r', par exemple, ne s'annulait pas, il aurait une résultante située hors du plan MN, et qui ne pourrait donc pas faire équilibre aux trois autres composantes p, q, r, situées dans ce plan (47). Ainsi les trois forces p', q', r' se font équilibre, et, par conséquent, l'une quelconque d'entre elles est directement opposée à la résultante des deux autres. Donc leurs trois directions GA, GE, GC sont dans un même plan, et, par suite, les trois points A, E, C, étant situés sur l'intersection des deux plans MN, AGC, se trouvent en ligne droite.

2° Les trois forces P, Q, R, étant ainsi dans un même plan, deux d'entre elles P, Q sont parallèles ou concourantes. Si elles sont parallèles, leur résultante devant être à la fois parallèle à leur direction, et directement opposée à la troisième force R, les trois forces P, Q, R se-

ront donc parallèles. Si les forces P, Q concourent, leur résultante devant à la fois passer par leur point de rencontre, et se trouver directement opposée à la troisième force R, les trois forces P, Q, R concourront donc en un même point.

SECTION V.

COMPOSITION DES FORCES DIRIGÉES D'UNE MANIÈRE QUELCONQUE DANS L'ESPACE.

49. Lemme I. *Deux forces non situées dans un même plan ne peuvent avoir une résultante unique.*

Car si les deux forces données P, Q pouvaient avoir une résultante R, une force —R égale et directement opposée à R ferait équilibre aux deux forces P, Q; donc (48, 2°) les directions de P, Q, —R seraient parallèles ou concourraient en un même point, et par conséquent les forces P, Q seraient dans un même plan.

50. Lemme II. *Deux forces, non situées dans un même plan, peuvent toujours être remplacées 1° par deux forces dont l'une soit appliquée à un point donné dans l'espace; 2° par un couple et par une force appliquée à un point donné, ce point étant d'ailleurs lié d'une manière invariable au système proposé.*

Fig. 22. Soient P, Q les forces données, et O le point donné dans l'espace.

1° Par le point O et par les directions des forces P, Q faisons passer deux plans OAE, OCE, et par un point quelconque E de leur intersection, menons un plan MN

qui rencontre les directions des forces aux points A et C, que nous prendrons pour leurs points d'application. Décomposons (comme au n° 48) chacune des forces P, Q en deux autres, les premières composantes p, q, situées dans le plan MN, les secondes p', q', dirigées suivant AO, CO. Comme celles-ci concourent au point O, elles auront une résultante P′, appliquée à ce point. Les autres composantes p, q, étant évidemment dirigées suivant les intersections AE, CE des plans AOE, COE avec le plan MN, auront une résultante Q′ appliquée au point de concours E. Donc le système des forces P, Q peut être remplacé par celui des deux autres P′, Q′, dont l'une P′ passe par le point donné.

2° Les forces P, Q étant remplacées par les forces P′, Q′, appliquons au point O deux forces Q_1, $-Q_1$, toutes deux égales et parallèles à Q′, mais directement opposées entre elles, le système ne sera pas troublé. Or les forces P′, Q_1, ont une résultante R passant par leur point d'application O. Les forces Q′, $-Q_1$ étant égales, parallèles et non directement opposées, forment un couple. Donc le système proposé P, Q, peut se remplacer par un couple Q′, $-Q_1$, et par une force R appliquée au point donné.

51. Remarque I. *La résultante des forces* P′, Q′, *transportées parallèlement à elles-mêmes en un point quelconque de l'espace, est la même que celle des forces* P, Q *transportées au même point.*

Car si l'on applique à ce point deux forces P″, Q″ égales et parallèles à P, Q, puis deux forces P‴, Q‴ égales et parallèles à P′, Q′, on pourra décomposer P‴ en deux forces p_1, q_1, égales et parallèles aux forces p', q' du n° 50, et Q‴ en deux forces p_2, q_2 égales et parallèles à p, q. Or, les forces p_1, p_2 ont évidemment pour résultante la force P″, c'est-à-dire la force P transportée,

et de même les forces q_1, q_2 ont pour résultante la force Q'' ou la force Q transportée. Donc le système P'', Q'', ou P, Q transporté, a la même résultante que le système P''', Q''', ou P', Q' transporté.

Il suit de là que, dans le second cas du n° 50, la force R est également la résultante des forces P, Q transportées parallèlement à elles-mêmes au point donné.

52. Remarque II. Cette démonstration s'applique également au cas particulier où les deux forces données sont dans un même plan.

53. Théorème. *Un nombre quelconque de forces, dirigées arbitrairement dans l'espace, peuvent toujours se réduire à deux forces au plus, situées, en général, dans des plans différents.*

Fig. 23. Soient P, Q, S, etc., les forces données. Menons un plan MN qui rencontre leurs directions en des points A, B, C, etc., que nous joindrons à un point quelconque O, situé hors du plan MN, par les droites AO, BO, CO, etc. Décomposant, comme aux n°s 48 et 50, chacune des forces P, Q, S, etc., en deux, les unes p, q, s... situées dans le plan MN, les autres p', q', s',... dirigées suivant les droites AO, BO, CO,... Comme celles-ci concourent au point O, elles auront une résultante R' appliquée à ce point. Les autres composantes p, q, s,... étant situées dans un même plan, se réduiront (46) à une résultante R ou à un couple (R_1, $-R_1$). Mais dans ce dernier cas, on pourra décomposer R' en deux forces r, r', dont l'une r soit parallèle à R_1. Or, les trois forces parallèles R_1, r, $-R_1$, dont la somme n'est pas nulle, auront nécessairement une résultante r''; et alors il ne restera plus que les deux forces r', r''. Par conséquent, les forces proposées se réduiront toujours soit aux deux forces R, R', soit aux deux forces r', r'', qui, en général, ne seront pas dans un même plan.

Parmi les cas particuliers qui peuvent se présenter, nous distinguerons les trois suivants :

1° *Si les deux résultantes partielles sont situées dans un même plan, sans être à la fois égales, parallèles et de sens contraires, les forces proposées auront une résultante unique.*

2° *Si les deux résultantes partielles sont à la fois égales, parallèles et de sens contraires, les forces proposées se réduiront à un couple.*

Il en sera de même lorsque les premières composantes se réduiront à un couple, et qu'en même temps les autres composantes se feront équilibre.

3° *Si chaque système de composantes est séparément en équilibre, le système proposé sera de même en équilibre.*

Réciproquement, *si les forces proposées se font équilibre, il en sera de même de chaque système de composantes.*

Car si l'un des systèmes de composantes avait une résultante, comme celle-ci serait située hors du plan qui contient l'autre système, elle ne pourrait lui faire équilibre (47); et, par conséquent, les forces proposées ne seraient pas en équilibre, comme on l'a supposé.

54. Remarque I. Deux forces, dirigées d'une manière quelconque dans l'espace, pouvant toujours se remplacer par deux autres, dont l'une soit appliquée à un point donné (51), il résulte du théorème précédent qu'*un nombre quelconque de forces dirigées arbitrairement dans l'espace peuvent toujours se réduire à deux forces, dont l'une soit appliquée à un point donné.*

55. Remarque II. La proposition précédente, ayant lieu pour des forces dirigées arbitrairement dans l'espace, doit également s'appliquer à celles dont les directions sont parallèles.

Donc, *un nombre quelconque de forces, ayant dans l'espace des directions parallèles, peuvent toujours se réduire à deux forces, dont l'une soit appliquée à un point donné.*

Au reste, cette proposition peut s'établir directement ainsi qu'il suit :

Fig. 24. Menons un plan MN qui rencontre les forces données P, Q, S,... en des points A, B, C...; par le point O, donné hors du plan MN, menons à la direction commune de ces forces la parallèle OD qui rencontre le plan MN au point D, et joignons les points O et D aux points A, B, C,... par les droites OA, OB, OC..., DA, DB, DC,... Cela posé, décomposons chacune des forces P, Q, S,... en deux autres, les premières composantes p, q, s... situées dans le plan MN suivant les droites DA, DB, DC..., les secondes composantes p', q', s',... dirigées suivant les droites AO, BO, CO,.... Les premières se réduiront à une force unique R appliquée au point D, et les secondes à une force unique R' appliquée au point O.

De plus, cette force R' ne sera jamais nulle lorsque le système proposé ne sera pas en équilibre : car autrement ce système aurait pour résultante la force R située dans le plan MN ; or, la résultante de plusieurs forces parallèles doit être parallèle à la direction commune.

56. Théorème. *Lorsqu'un système de forces est en équilibre, si l'on décompose chacune d'elles en deux autres, les unes situées dans un même plan, les autres parallèles à une même droite, chaque système de composantes doit être séparément en équilibre.*

Fig. 25. Soient P, Q, S,... les forces données, p, q, s,... les composantes situées dans le plan MN, et p', q', s',... les composantes parallèles à la droite donnée ZZ'. D'abord ces dernières composantes doivent se faire équi-

libre, car autrement on pourrait (55) les remplacer par deux forces, l'une R située dans le plan MN, l'autre R' dirigée hors du plan MN, et qui ne peut jamais être nulle. Or, une force ne peut faire équilibre à d'autres situées dans un plan, à moins d'être comprise dans le même plan (47) : donc les composantes p, q, s,... sont en équilibre; et, par conséquent, il en est de même des composantes p', q', s',... auxquelles se réduit le système proposé.

57. Remarque I. Lorsque la droite ZZ' est perpendiculaire au plan MN, les composantes p', q', s',... sont aussi perpendiculaires au même plan, et, par suite, aux composantes p, q, s,... Dans ce cas, les composantes p', q', s'... sont les *projections* des forces P, Q, S,... suivant leur propre direction (23). Or, la somme de ces composantes doit être nulle, puisqu'elles se font équilibre (43). Donc la somme des projections des forces P, Q, S,... sur la droite ZZ', qui égalent évidemment les composantes p', q', s'..., est nulle aussi. Donc

Si l'on projette sur une droite quelconque des forces en équilibre dans l'espace, leurs projections représenteront des forces également en équilibre.

58. Remarque II. Dans le même cas, les composantes p, q, s,... sont les projections des forces P, Q, S,... sur le plan MN. Donc

Si l'on projette sur un plan quelconque des forces en équilibre dans l'espace, leurs projections représenteront des forces également en équilibre.

59. Théorème. *Lorsque des forces situées dans l'espace ont une résultante, sa projection sur une droite, ou sur un plan, est la résultante des projections des forces proposées sur la même droite, ou sur le même plan.*

Car si l'on applique, suivant la direction de la résultante R des forces P, Q, S..., une force —R égale et

directement opposée à R, le système —R, P, Q, S,..... sera en équilibre. Donc (57) les projections de toutes les forces du système sur une droite XX′ représenteront des forces en équilibre; et, par conséquent, la projection de —R sera égale et directement opposée à la résultante des projections de P, Q, S..., qui sera donc la projection de la résultante +R des forces proposées.

La démonstration est absolument la même, lorsque les forces dont il s'agit sont projetées sur un plan.

60. Théorème. *Lorsque des forces situées dans l'espace n'ont pas de résultante unique, si l'on projette sur une droite quelconque les forces proposées, et les deux forces auxquelles on peut toujours les réduire, la somme des projections de ces deux dernières forces est égale à la somme des projections des forces proposées.*

Car soient R, R′, les deux forces auxquelles les forces données P, Q, S,... peuvent toujours se réduire (53), et r, r', p, q, s,... leurs projections sur une droite quelconque XX′. Si l'on applique suivant les directions de R et de R′, deux forces —R, —R′, qui leur soient respectivement égales et opposées, le système —R, —R′, P, Q, S,... sera en équilibre. Donc la somme des projections des forces de ce système sur la droite XX′ sera nulle (57). Comme les projections de —R et de —R′ doivent évidemment être égales et de signe contraire aux projections r, r' de R et de R′, elles seront donc $-r$, $-r'$, et, par conséquent, l'on aura

$$-r-r'+p+q+s+\cdots=0,$$

d'où
$$r+r'=p+q+s+\cdots,$$

ce qui démontre le théorème.

61. Corollaire I. *Si l'on transporte les forces* R, R′, P, Q, S,... *parallèlement à elles-mêmes en un point quel-*

conque de l'espace, les forces R, R′, *y auront la même résultante que les forces* P, Q, S,...

Car la relation $r+r'=p+q+s+\ldots$ montre que la projection $r+r'$ de la résultante des forces R et R′ sur tous les axes possibles, égale la projection $p+q+s+\ldots$ des forces P, Q, S,... Par conséquent, les deux résultantes, qui d'ailleurs passent par un même point, doivent se confondre en une seule.

62. COROLLAIRE II. *Si l'on décompose chacune des forces* R, R′, P, Q, S, ... *en trois autres respectivement parallèles à trois axes menés par un point quelconque de l'espace, la somme des composantes de* P, Q, S, ... *parallèles à chaque axe, sera égale à la somme des composantes de* R *et de* R′, *parallèles au même axe.*

Car pour opérer la décomposition des forces, on peut les transporter toutes parallèlement à elles-mêmes au point donné O, ce qui ne doit altérer en rien chaque composante. Mais alors les forces R, R′, ayant, d'après le corollaire précédent, la même résultante que les forces P, Q, S..., il est clair que la somme des composantes des forces P, Q, S, ... suivant chaque axe égalera la somme des composantes de R et de R′, suivant le même axe. Ainsi en appelant X, Y, Z, les sommes des composantes de P, Q, S, ... suivant les trois axes donnés OX, OY, OZ, et nommant x, x', y, y', z, z', les composantes de R et de R′ suivant les mêmes axes, on aura

$$x+x'=X,\ y+y'=Y,\ z+z'=Z.$$

Dans le cas particulier où les axes OX, OY, OZ, sont rectangulaires, $x+x'$, $y+y'$, $z+z'$ et X, Y, Z sont les sommes des projections de R, R′ et des forces P, Q, S, ... sur les trois axes, ce qui rentre dans l'énoncé du théorème.

Ce corollaire s'applique évidemment à des forces di-

rigées dans un même plan XOY, lesquelles peuvent toujours (46) se réduire à deux forces R, R', situées dans leur plan. Alors Z, z, z' sont nuls, et l'on a seulement

$$x+x'=X,\ y+y'=Y.$$

CHAPITRE II.

DES MOMENTS ET DES ÉQUATIONS D'ÉQUILIBRE.

SECTION PREMIÈRE.

DES MOMENTS.

63. On appelle *moment d'une force par rapport à un point* le produit de l'intensité de la force par la perpendiculaire abaissée du point donné sur sa direction.

Ainsi, en représentant par P l'intensité d'une force, et par p la perpendiculaire abaissée d'un point donné sur sa direction, le moment de la force, pris par rapport au point, sera le produit Pp, c'est-à-dire le produit de deux facteurs numériques exprimant, l'un le rapport de l'intensité de la force P à celle de la force prise pour unité de mesure, l'autre le rapport de la perpendiculaire à l'unité de longueur.

Le point, par rapport auquel on prend les moments des forces d'un système quelconque, se nomme *centre des moments*.

64. On considère encore, en statique, deux autres espèces de moments, savoir :

1° *Le moment d'une force par rapport à un plan parallèle à sa direction*. Ce moment égale le produit Pp

de l'intensité de la force P par la perpendiculaire p abaissée d'un quelconque de ses points sur le plan.

2° *Le moment d'une force par rapport à un axe.*

Fig. 26. Ce moment égale le produit $P'p$ de la projection P' de la force P, sur un plan MN perpendiculaire à l'axe donné AX, par la plus courte distance p de la direction de la force P à cet axe. Il est évident que cette plus courte distance p égale la perpendiculaire AB menée à la direction de P' par le point A, intersection de l'axe AX et du plan MN qui lui est perpendiculaire.

65. Théorème fondamental. *Lorsque deux forces sont appliquées à un même point, le moment de la résultante, par rapport à un point quelconque pris dans le plan des forces, est égal 1° à la somme des moments des composantes, 2° à leur différence, suivant que le centre des moments est situé 1° en dehors de l'angle des composantes ou de son opposé au sommet, 2° dans l'un ou dans l'autre de ces deux angles.*

Fig. 27 et 28. Soient données les forces P, Q, représentées par les lignes AB, AC, et soit R leur résultante, déterminée par la diagonale du parallélogramme ABCD. D'un point O, pris dans le plan des trois forces, abaissons sur leurs directions les perpendiculaires OI, OL, OK. Il s'agit de

Fig. 27. faire voir qu'on aura, dans le premier cas,

$$OL.AD = OI.AB + OK.AC,$$

Fig. 28. et, dans le deuxième cas,

$$OL.AD = OI.AB - OK.AC,$$

la force P ou AB étant celle des deux forces qui a le plus grand moment.

La démonstration consiste à transformer les moments en surfaces qu'on sache évaluer; on y parvient aisément en remarquant que si l'on joint par des droites le point O avec les quatre sommets du parallélogramme ABCD, on

déterminera trois triangles OAB, OAC, OAD, qui auront respectivement pour bases les trois forces AB, AC, AD, et pour hauteurs les perpendiculaires OI, OK, OL, abaissées du point O sur leurs directions. Or, la surface du triangle $OAB = \frac{1}{2} OI . AIB$, d'où

$$OI . AB = 2 AOB;$$

de même $OK . AC = 2 OAC$, et $OL . AD = 2 OAD$. Ainsi le moment d'une force a pour expression le double du triangle qui a cette force pour base. Tout se réduit donc à faire voir que le triangle OAD égale la somme des triangles OAB, OAC, dans le premier cas, et leur différence, dans le deuxième cas. En effet, si par les sommets opposés B, C du parallélogramme, on mène à OA les deux parallèles BA′, CO′, qui rencontrent la direction de AD aux points A′, O′, en les joignant au point O par les droites OA′, OO′, on formera deux triangles OAA′, OAO′, qui seront respectivement équivalents aux triangles OAB, OAC, comme ayant même base OA, et leurs sommets sur une même parallèle à la base. Donc au lieu des triangles OAB, OAC, OAD, nous pourrons comparer les trois suivants, OAA′, OAO′, OAD.

Ceux-ci, ayant même hauteur OL, sont entre eux comme leurs bases, et donnent la proportion

$$OAA' : OAO' : OAD :: AA' : AO' : AD.$$

Mais dans le premier cas, les triangles ABA′, CDO′ sont égaux; car ils ont les côtés AB, CD égaux, les angles BAA′, CDO′ égaux comme alternes-internes, et les angles BA′A, CO′D égaux comme ayant les côtés parallèles. On a donc $AA' = DO'$. Fig. 27.

Remplaçant AA′ par DO′ dans la proportion ci-dessus, elle devient

$$OAA : OAO' : OAD :: DO' : AO' : AD.$$

Or, $AD=AO'+DO'$; donc

$$tri.OAD=tri.OAA'+tri.OAO'=tri.OAB+tri.OAC,$$

et, par conséquent,

$$OL.AD=OI.AB+OK.AC.$$

Fig. 28. Maintenant dans le deuxième cas, les triangles BDA', CAO' sont égaux; car ils ont les côtés BD, AC égaux, les angles DA'B, AO'C égaux comme alternes-internes, et les angles DBA', ACO' égaux comme ayant les côtés parallèles. On a donc $DA'=AO'$.

Remplaçant AO' par DA dans la première proportion, elle devient

$$OAA':OAO':OAD::AA':DA':AD.$$

Or, $AD=AA'-DA'$; donc

$$tri.OAD=tri.OAA'-tri.OAO'=tri.OAB-tri.OAC,$$

et, par conséquent,

$$OL.AD=OI.AB-OK.AC.$$

Ainsi, en représentant par p, q, r les perpendiculaires abaissées du centre des moments sur les directions des trois forces, on aura, en général,

$$Rr=Pp\pm Qq,$$

Fig. 27. le signe + correspondant au premier cas, et le signe —
Fig. 28. au second cas.

66. Remarque I. Si l'on conçoit que le centre des moments soit fixe, et que les perpendiculaires p, q, r forment un système invariable, on voit que les forces P, Q, R, qui peuvent être censées agir aux extrémités I, K, L, de ces droites, ne pourront produire qu'un mouvement de rotation autour du centre des moments. Or, la figure 27 démontre évidemment que si le point O est situé en dehors de l'angle BAC ou de son opposé au

sommet, les trois forces P, Q, R tendent à faire tourner leurs points d'application *dans le même sens* autour du point O; et la figure 28 montre que, si le point O est situé dans l'angle BAC ou dans son opposé au sommet, les forces P, Q tendent à faire tourner leurs points d'application *en sens opposés;* on voit, en outre, sur la même figure, que la résultante R tend à faire tourner son point d'application dans le même sens que la composante qui a le plus grand moment. Ainsi les forces, qui donnent des moments de signes contraires, sont précisément celles qui tendent à faire tourner en sens opposés leurs points d'application autour du centre des moments.

On peut donc donner au théorème précédent cet autre énoncé, qui a l'avantage de pouvoir facilement s'étendre à un nombre quelconque de forces dirigées dans un même plan, savoir :

Lorsque deux forces sont appliquées à un même point, le moment de la résultante, par rapport à un point quelconque de leur plan, est égal à la somme ou à la différence des moments des composantes, selon qu'elles tendent à faire tourner leur point d'application dans le même sens ou en sens opposés, autour du centre des moments, et la résultante tend à faire tourner dans le même sens que la composante qui a le plus grand moment.

Enfin, en ayant soin de donner aux moments les signes convenables, on peut encore énoncer le même théorème plus simplement de la manière suivante :

Le moment de la résultante de deux forces qui concourent, pris par rapport à un point quelconque de leur plan, est égal à la somme algébrique des moments des composantes.

Le théorème, ainsi présenté, se résume dans la formule

$$Rr = Pp + Qq.$$

A l'avenir, dans tous les cas analogues, nous entendrons par le mot *somme* la somme algébrique, ce qui donnera plus de précision aux énoncés.

67. Remarque II. Dans le cas où les directions des forces données sont rectangulaires, la relation ci-dessus, entre les moments des composantes et de la résultante, devient l'équation de la droite qui représente cette résultante, et, par conséquent, sert à déterminer sa direction.

Fig. 29. Car soient P, Q, R les trois forces, et O le centre des moments, pris, par exemple, dans l'angle IAK, opposé de l'angle BAC formé par les directions des composantes. Si l'on admet que la force P est celle qui a le plus grand moment, on aura (65)

$$(1)\quad Rr = Pp - Qq.$$

Or, si l'on mène par le point O deux axes rectangulaires OX, OY, respectivement parallèles aux forces P, Q, les perpendiculaires OK, OI, ou q, p, deviendront les cordonnées x, y du point d'application A, de sorte qu'en désignant par X, Y, les forces P, Q, et par n le moment de la résultante R, la relation (1) deviendra

$$(2)\quad Xy - Yx = n.$$

Quoique cette équation ait été obtenue dans le cas particulier de la figure 29, on peut aisément vérifier qu'elle est générale, en ayant soin de donner des signes convenables aux cinq quantités qu'elle renferme.

On conviendra, par exemple, de prendre *positivement*

1° Les forces parallèles aux axes OX, OY, lorsqu'elles agiront pour écarter leur point d'application des axes OY, OX.

2° Les ordonnées y situées au-dessus de l'axe OX, et les abscisses x situées à droite de l'axe OY.

3° Les moments des forces qui tendent à faire tourner leur point d'application de gauche à droite, dans le sens de la flèche autour du point O, supposé lié d'une manière invariable au point d'application A. Fig. 29.

Alors les mêmes grandeurs, situées ou dirigées en sens inverse, seront prises *négativement*.

Les quantités X, Y, n étant censées connues, l'équation (2) établit donc une relation constante entre les coordonnées x, y d'un point quelconque de la droite AD, et, par conséquent, est l'équation de cette droite.

68. Théorème. *Lorsque des forces, appliquées à un même point, sont situées dans un même plan, le moment de la résultante, pris par rapport à un point quelconque du plan, est égal à la somme des moments des composantes, par rapport au même point.*

Ce théorème se déduit immédiatement du précédent dont on peut le regarder comme un corollaire. Car soient P, P', P''... les forces données. Si l'on ne considère d'abord que les deux forces P, P', et qu'on prenne leur résultante R', en adoptant la même notation que ci-dessus (65), on aura $R'r' = Pp + P'p'$. Combinant alors cette première résultante R' avec la force P'', et prenant leur résultante R'', on aura de même

$$R''r'' = R'r' + P''p'',$$

ou bien, en substituant à $R'r'$ sa valeur,

$$R''r'' = Pp + P'p' + P''p''.$$

En continuant ainsi jusqu'à ce qu'on ait employé toutes les forces données, et nommant R la dernière résultante obtenue, on aura

$$Rr = Pp + P'p' + P''p'' + \text{etc}\ldots;$$

de plus, le signe de la somme des moments indiquera dans quel sens agit la résultante.

69. **Remarque.** Si le point, pris pour centre des moments, est situé sur la direction de la résultante R, la perpendiculaire r est nulle, et, par suite, la somme des moments des composantes est égale à zéro; on a donc

$$Pp+P'p'+P''p''+\ldots=0.$$

70. **Corollaire.** Quand les forces proposées se font équilibre, leur résultante est nulle; et, par conséquent, la somme des moments des composantes, par rapport à un point quelconque du plan, est toujours égale à zéro; on a donc

$$Pp+P'p'+P''p''+\text{etc}\ldots=0.$$

71. **Théorème.** *Lorsque des forces, appliquées à un même point, sont dirigées d'une manière quelconque dans l'espace, le moment de la résultante, par rapport à une droite quelconque, est égal à la somme des moments des composantes par rapport à la même droite.*

Fig. 30. Car soient P, P', P'',... les forces données, et R leur résultante, représentées par les droites AB, AC, AD,... AL. Par un point O de la droite donnée XX', menons un plan MN qui lui soit perpendiculaire, et projetons, sur ce même plan, les forces AB, AC, AD,... AL, en A'B', A'C', A'D',... A'L'. Comme A'L' (59) est la résultante des forces A'B', A'C', A'D',..., si du point O l'on mène sur les directions de ces forces les perpendiculaires Ob, Oc, Od,... Ol, on aura (68)

$$A'L'.Ol=A'B'.Ob+A'C'.Oc+A'D'.Od+\text{etc.}$$

Or, A'L'.Ol, A'B'.Ob,... étant (64) les moments des forces P, P', P'',... R, par rapport à l'axe XX', si l'on représente par p, p', p'',... r les plus courtes distances des forces à la droite XX', on aura donc, en général,

$$Rr=Pp+P'p'+P''p''+\text{etc.}$$

72. **Théorème.** *Lorsque deux forces parallèles agissent*

dans le même sens, le moment de leur résultante, par rapport à un plan parallèle à leur direction, est égal à la somme des moments des composantes, par rapport au même plan.

Soient P, Q, les deux forces données, R, leur résultante, et MN un plan quelconque parallèle à leur direction. Par les points d'application A, B, L, menons à ce plan les perpendiculaires AA', BB', LL', joignons B'A', et par le point B menons à B'A' la parallèle Ba, qui rencontre AA' en a, et LL' en l. On a vu (34) que les forces P, Q, R sont liées entre elles par les proportions Fig. 31.

$$P:R::LB:AB, \quad Q:R::AL:AB.$$

Cela posé, les triangles semblables BLl, BAa donnent la proportion Ll:Aa::LB:AB, d'où Ll.AB=Aa.BL. Or, Ba étant parallèle à B'A', on a évidemment

$$lL'(AL+LB)=BB'.AL+aA'.LB;$$

ajoutant cette équation membre à membre avec la précédente, il vient LL'.AB=BB'.AL+AA'.LB. Substituant à LB et AL les valeurs tirées des deux proportions ci-dessus, on trouve, après la réduction,

$$R.LL'=P.AA'+Q.BB',$$

ce qui démontre le théorème.

Ainsi, en représentant par p, q, r, les distances des forces au plan MN, on a

$$Rr=Pp+Qq.$$

73. Remarque. Lorsque le plan MN ne laisse pas d'un même côté les trois points d'application, comme il arrive dans la figure 32, il faut donner des signes contraires aux perpendiculaires abaissées des points situés de différents côtés du plan. Car si l'on mène au plan donné MN un plan parallèle mn, qui laisse d'un même côté les trois points Fig. 32.

A, L, B, et qu'on prolonge jusqu'à ce plan en a, l, b, les perpendiculaires abaissées des points A, L, B, sur le plan MN, on aura, comme on vient de le faire voir, $Ll.AB = Bb.AL + Aa.LB$. Or, à cause de $B'b = L'l = A'a$, on a évidemment

$$L'l(AL + LB) = B'b.AL + A'a.LB;$$

retranchant cette équation de la précédente, il vient

$$(Ll - L'l)AB = (Bb - B'b)AL + (Aa - A'a)LB,$$

ou $$LL'.AB = AA'.LB - BB'.AL.$$

Substituant à LB et AL les mêmes valeurs que ci-dessus, et réduisant il vient

$$R.LL' = P.AA' - Q.BB'$$

ou $$Rr = Pp - Qq.$$

Donc, *le moment de la résultante, par rapport au plan donné, est égal à la différence des moments des composantes.*

74. Théorème. *Lorsque deux forces agissent en sens contraires, le moment de leur résultante, par rapport à un plan parallèle à leur direction, est égal à la différence des moments des composantes.*

Fig. 33. Soient P, Q les deux forces données, R leur résultante, et MN un plan parallèle à leur direction. Si par les points d'application A, B, L, on mène à ce plan les perpendiculaires AA', BB', LL', on aura (34) les proportions

$$LB : AB :: P : R, \quad LA : AB :: Q : R.$$

Or, d'après la démonstration du théorème précédent (72), les trois points L, A, B, donnent

$$AA'.LB = LL'.AB + BB'.LA,$$

d'où $$LL'.AB = AA'.LB - BB'.LA.$$

Substituant à LB et LA les valeurs tirées des deux propor-

tions ci-dessus, il vient après la réduction,

$$LL'.R = AA'.P - BB'.Q,$$

ce qui démontre le théorème.

Ainsi, en représentant par p, q, r les distances des forces au plan MN, on a

$$Rr = Pp - Qq.$$

75. Théorème. *Lorsqu'on a dans l'espace un nombre quelconque de forces parallèles, le moment de leur résultante, par rapport à un plan parallèle à leur direction, est égal à l'excès de la somme des moments des composantes qui tirent dans un sens, sur la somme des moments des composantes qui tirent en sens contraire*, ou, en d'autres termes, *le moment de la résultante est égal à la somme algébrique des moments des composantes par rapport au même plan.*

Car soient P, P', P'',... les forces qui tirent dans un sens, Q, Q', Q'',... celles qui tirent dans le sens opposé, et $p, p', p'', \ldots q, q', q'', \ldots$ leurs distances au plan donné MN, parallèle à leur direction. Si l'on considère d'abord les forces P, P', P'',.... en combinant deux d'entre elles P, P' et nommant R_1 leur résultante, on aura (72) $R_1 r_1 = Pp + P'p'$. Combinant ensuite les forces R_1, P'', et nommant R_2 leur résultante, on aura pareillement $R_2 r_2 = R_1 r_1 + P''p''$. Continuant ainsi jusqu'à ce qu'on ait employé toutes les forces de même sens, et appelant R' leur résultante, il est clair qu'on aura en définitive

$$R'r' = Pp + P'p' + P''p'' + \ldots\ldots$$

Opérant de même sur les forces Q, Q', Q'',.... qui agissent toutes dans un même sens, opposé à celui des premières, et nommant R'' leur résultante, on aura de même

$$R''r'' = Qq + Q'q' + Q''q'' + \ldots\ldots$$

Le système des forces proposées étant ainsi remplacé

par les deux forces R′, R″ qui agissent en sens contraires, si l'on désigne leur résultante par R, on aura (74)

$$Rr = R'r' - R''r'',$$

et enfin, en substituant à $R'r'$, $R''r''$ leurs valeurs,

$$Rr = Pp + P'p' + P''p'' + \ldots - (Qq + Q'q' + Q''q'' + \ldots),$$

ce qui démontre le théorème.

Si l'on regarde comme positives les forces P, P′, P″,... qui agissent dans un sens, et comme négatives les forces Q, Q′, Q″,... qui agissent dans le sens opposé, l'égalité précédente devient

$$Rr = Pp + P'p' + P''p'' + \ldots + Qq + Q'q' + Q''q'' + \ldots$$

76. Remarque. Pour que la dernière égalité convienne à tous les cas, il faut donner des signes contraires, 1° aux forces qui agissent dans des sens opposés, 2° aux perpendiculaires abaissées sur le plan MN, qui correspondent à des forces situées de différents côtés de ce plan.

Ainsi, en convenant de regarder comme positives les forces qui agissent dans un sens déterminé, il faudra prendre négativement celles qui agissent dans le sens opposé. De même, en convenant de regarder comme positives les distances du plan MN à des forces situées d'un certain côté du plan, il faudra prendre négativement les distances du même plan aux forces situées de l'autre côté. Ayant ainsi déterminé le signe des deux facteurs du produit dont chaque moment se compose, on aura donc le signe du moment lui-même sans la moindre incertitude.

Ces considérations, comme celles des nos 67, 73, 78, s'accordent parfaitement avec la manière dont nous avons envisagé les quantités négatives dans notre Algèbre (2e éd., nos 14 et suivants).

77. Théorème. *Lorsque des forces parallèles agissent*

dans un même plan, le moment de leur résultante, par rapport à un point quelconque du plan, est égal à la somme des moments des composantes par rapport au même point.

Car soient P, P',.... Q, Q',.... les forces données, qui agissent dans le plan MN, R leur résultante, et O le point pris pour centre des moments. Abaissons de ce point sur la direction des forces une perpendiculaire OK qui les coupe aux points A, A',... B, B',... L. Si l'on mène, par le point O, une parallèle OO' à la direction des forces, et, par cette parallèle, un plan perpendiculaire au plan MN, il est évident que les droites OA, OA',... OB, OB',.... OL, seront les distances des forces à un plan parallèle à leur direction ; on aura donc (75) Fig. 34.

$$R.OL = P.OA + P'.OA'.... + Q.OB + Q'.OB'.....$$

ce qui démontre le théorème.

78. Remarque. Pour que cette égalité convienne à tous les cas, il faut (comme au n° 76) donner des signes contraires, 1° aux forces qui agissent dans des sens opposés ; 2° aux distances telles que OA, OB comptées à partir du point O dans deux sens différents. Si donc on convient que les forces P, P'... et les distances OA, OB,.. seront affectées du signe +, il faudra prendre avec le signe — les forces Q, Q',... et les distances OA', OB'.... Par conséquent, les moments P.OA, Q'.OB' seront positifs, et les moments P'.OA', Q.OB seront négatifs. Or, si l'on suppose que le centre O des moments soit fixe et lié d'une manière invariable aux points d'application des forces, il est évident que les forces P, Q' tendront à faire tourner, dans un même sens, leurs points d'application A, B' autour du centre O, tandis que les forces P, Q tendront à faire tourner les leurs autour du même centre en sens contraires. De là résulte le principe suivant :

Deux forces parallèles ont des moments de même signe ou de signes contraires, selon qu'elles tendent à faire tourner leurs points d'application, autour du centre des moments, dans le même sens ou dans des sens opposés.

Le même principe ayant été déjà démontré (66) pour deux forces qui concourent, se trouve donc généralisé pour des forces dirigées d'une manière quelconque dans un plan.

Il est de même de la Remarque n° 69 et du Corollaire n° 70, qui s'appliquent ici mot pour mot.

79. Théorème. *Lorsque des forces parallèles, situées dans un même plan, se réduisent à un couple, la somme de leurs moments, par rapport à un point quelconque du plan, égale une quantité constante qui ne peut jamais être nulle.*

Car soient P, P',.... Q, Q',.... des forces parallèles, situées dans un plan MN et qui se réduisent au couple R', R''. En opérant comme tout à l'heure (75) et désignant par p, p',.... q, q',.... les perpendiculaires abaissées du centre des moments sur les directions des forces, on voit que P, P'....R', d'une part, et Q, Q',.... R'', d'autre part, donneront les deux égalités

$$R'r' = Pp + P'p' + \ldots,$$
$$R''r'' = Qq + Q'q' + \ldots,$$

faisant leur somme, il vient, à cause de $R' = R''$,

$$R'(r' + r'') = Pp + P'p' + \ldots + Qq + Q'q' + \ldots$$

Comme la somme $r' + r''$, qui exprime la distance des deux résultantes partielles R', R'', ne varie pas, quel que soit le point pris pour centre des moments, il est clair que l'égalité précédente démontre le théorème énoncé.

La réciproque de cette proposition est également vraie, comme il est facile de le voir.

80. THÉORÈME. *Lorsque des forces, dirigées d'une manière quelconque dans un même plan, ont une résultante, son moment, par rapport à un point du plan, est égal à la somme des moments des composantes par rapport au même point.*

En effet, soient P, P′, P″,... P_n les forces données dans un plan MN. Puisque, par hypothèse, les forces proposées ont une résultante, on pourra toujours choisir deux d'entre elles P, P′ qui ne soient pas à la fois égales, parallèles et de sens contraires; ces deux forces auront donc une résultante R′, et d'après l'un des théorèmes précédents (65, 72 ou 74), en prenant les moments par rapport à un point du plan MN, on aura

$$R'r' = Pp + P'p'.$$

Par la même raison, il y aura toujours parmi les forces restantes une force telle que P″, qui ne sera pas à la fois égale, parallèle et de sens contraire avec la résultante partielle R′. Combinant les forces R′, P″, et nommant R″ leur résultante, en prenant les moments par rapport au même plan, on aura comme tout à l'heure

$$R''r'' = R'r' + P''p'',$$

ou bien

$$R''r'' = Pp + P'p' + P''p''.$$

Il est clair qu'on pourra toujours continuer ainsi jusqu'à ce qu'on ait épuisé toutes les forces proposées, puisqu'elles ont une résultante R, qui sera précisément la résultante de la dernière résultante partielle R_{n-1} et de la dernière force P_n du système, de sorte qu'on obtiendra l'égalité

$$Rr = R_{n-1}\,r_{n-1} + P_n p_n,$$

et en substituant à $R_{n-1}\,r_{n-1}$ sa valeur tirée de l'égalité

qui précède, il viendra enfin

$$Rr = Pp + P'p' + P''p'' + \ldots\ldots + P_n p_n,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Quant aux signes des moments, il sera facile de les déterminer d'après le principe général établi ci-dessus (78).

81. Corollaire. Lorsque les forces données se font équilibre, on a $R = 0$, et par suite

$$Pp + P'p' + P''p'' + \ldots = 0.$$

Donc, *si des forces, dirigées d'une manière quelconque dans un plan, se font équilibre, la somme de leur moments par rapport à un point quelconque du plan est nulle.*

Ceci étend le corollaire n° 70 à des forces dirigées d'une manière quelconque dans un plan.

82. Théorème. *Lorsque des forces dirigées dans l'espace ont une résultante, le moment de la résultante, par rapport à une droite quelconque, est égal à la somme des moments des composantes, par rapport à la même droite.*

Car si l'on projette les forces données $P, P', P'' \ldots\ldots$ et leur résultante R, sur un plan MN perpendiculaire à la droite donnée OX, la projection R_1 de la résultante sera (59) la résultante des forces $P_1, P_1', P_1'', \ldots$ représentées par les projections des forces $P, P', P'', \ldots$ sur le même plan. Par conséquent si, comme dans le théo-
Fig. 27. rème n° 71, on représente par $r, p, p', p'', \ldots\ldots$ les perpendiculaires abaissées du point O, intersection de la droite OX et du plan MN, sur les directions des forces $R_1, P_1, P'_1, \ldots$ c'est-à-dire les plus courtes distances des forces $R, P, P', \ldots$ à l'axe OX, on aura

$$R_1 r = P_1 p + P_1' p' + P_1'' p'' + \text{etc.}$$

Or, d'après la définition (64), $R_1 r, P_1 p, P_1' p', \ldots$ sont

les moments des forces R, P, P',... par rapport à OX. L'égalité précédente démontre donc le théorème énoncé.

83. Remarque. On a vu (nos 66 et 78) que deux forces P_1, P_1', situées dans un même plan, ont leurs moments $P_1 p, P_1' p'$, de même signe ou de signes contraires, suivant qu'elles tendent à faire tourner leurs points d'application, autour du centre O des moments, dans un même sens ou dans des sens opposés. Or $P_1 p, P_1' p'$ sont les moments des forces P, P' par rapport à l'axe OX. Il suit donc de là que

Deux forces ont leurs moments, par rapport à un axe, de même signe ou de signes contraires, selon qu'elles tendent à faire tourner leurs points d'application, autour de l'axe des moments, dans le même sens ou dans des sens opposés.

84. Corollaire I. Si les forces données se font équilibre, leur résultante est nulle, et par conséquent sa projection est nulle aussi; on a donc $R_1 r = 0$. Donc,

Si des forces se font équilibre dans l'espace, la somme de leurs moments, par rapport à un axe quelconque, est nulle.

85. Corollaire II. Lorsque les forces données ne se font pas équilibre, elles peuvent toujours (51) se réduire à deux forces R', R'', situées, en général, dans deux plans différents. Donc si l'on oppose aux forces R', R'', deux forces égales et contraires —R', —R'', il y aura équilibre entre ces deux dernières forces et les forces proposées. Par conséquent, la somme des moments de toutes les forces de ce nouveau système sera nulle. Mais si, par rapport à un même axe, on appelle M la somme des moments des forces données, et m', m'', les moments des forces R', R'', il est clair que ceux des forces —R', —R'' seront $-m'$, $-m''$. Ainsi l'on aura $-m'-m''+M=0$, d'où $m'+m''=M$.

Donc, *la somme des moments de forces quelconques dans l'espace, par rapport à un axe, égale celle des moments des deux forces auxquelles on peut toujours les réduire.*

Le même principe s'applique évidemment à des forces

dirigées d'une manière quelconque dans un plan, puisque d'ailleurs elles peuvent toujours (46) se réduire à deux forces situées dans leur plan.

SECTION II.

ÉQUATIONS D'ÉQUILIBRE DES FORCES APPLIQUÉES A UN POINT.

---

86. D'après ce que nous avons dit dans les notions préliminaires (11), *les équations d'équilibre de plusieurs forces sont les relations nécessaires et suffisantes qui doivent exister entre leurs intensités, leurs directions et leurs points d'application pour que l'équilibre ait lieu.* Nous suivrons, dans leur recherche, le même ordre que pour la composition des forces; ainsi nous établirons successivement ces équations pour des forces concourantes, pour des forces parallèles et pour des forces dirigées d'une manière quelconque, soit dans un plan, soit dans l'espace.

87. THÉORÈME. *Pour qu'il y ait équilibre entre des forces appliquées à un même point et situées dans un même plan, il faut et il suffit que les sommes des composantes de ces forces, parallèles à deux axes situés dans le même plan, soient nulles séparément.*

Car soient P', P'', P''',... les forces données, appliquées au point A. Si, par ce point, on mène deux droites AX, AY, et que l'on décompose chacune des forces données en deux autres, les unes X', X'', X'''... dirigées suivant AX, les autres Y', Y'', Y'''... dirigées suivant AY, il est

clair que les premières composantes auront une résultante $X=X'+X''+X'''+\ldots$, et les autres une résultante $Y=Y'+Y''+Y'''+\ldots$ Comme ces deux résultantes ont deux directions différentes, il faut, pour que l'équilibre ait lieu, qu'on ait séparément $X=0$, $Y=0$.

Donc les équations d'équilibre du système proposé sont

$$X'+X''+X'''+\ldots=0, \quad Y'+Y''+Y'''+\ldots=0.$$

De plus ces équations sont suffisantes; car lorsqu'elles ont lieu, le système est en équilibre.

Il est entendu que, dans chacune des deux équations ci-dessus, on doit donner le signe + aux composantes qui tirent leurs points d'application dans un certain sens, et le signe — à celles qui les tirent dans le sens directement opposé (7 et 45).

88. REMARQUE I. Dans le cas particulier où les axes AX, AY font un angle droit, les composantes X', $X''\ldots$ Y', $Y''\ldots$ sont les projections des forces P', P''. . sur AX et sur AY. Si donc on représente par α', α'',... les angles formés par les directions AP', AP'',... avec AX, et comptés à partir de cet axe, on aura $X'=P'\cos\alpha'$,... $Y'=P'\sin\alpha'$,... et les équations d'équilibre deviendront Fig. 35

$$P'\cos\alpha'+P''\cos\alpha''+\ldots=0, \quad P'\sin\alpha'+P''\sin\alpha''+\ldots=0.$$

Deux produits tels que $P'\cos\alpha'$, $P''\cos\alpha''$ auront évidemment le même signe ou des signes contraires, suivant que les composantes X', X'' agiront dans le même sens ou dans des sens opposés. Il suffira donc de regarder toutes les forces P', P'',... comme positives, et de donner à $\cos\alpha'$, $\cos\alpha''$, les signes qui résultent des règles trigonométriques. On voit, d'ailleurs, que si une force P'

fait avec AX un angle α, toute force P‴, directement opposée à P′, doit faire avec AX un angle $\alpha''' = 200° + \alpha'$.

89. Remarque II. Lorsque les forces données ne se font pas équilibre, elles ont toujours une résultante R appliquée au point A, et faisant avec l'axe AX un certain angle que nous désignerons par α. Donc si, comme au n° 87, on appelle X et Y les résultantes partielles des composantes dirigées suivant AX et AY, on aura (23)

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2},$$

et les équations du numéro cité, savoir

$$P = R.\cos BAD, \quad Q = R.\cos CAD,$$

deviendront

$$X = R.\cos\alpha, \qquad Y = R.\sin\alpha,$$

d'où l'on tire

$$\cos\alpha = \frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2}}, \quad \sin\alpha = \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2}}.$$

Ces équations déterminent la direction de la résultante R, et le sens dans lequel elle agit.

90. Théorème. *Pour qu'il y ait équilibre entre des forces appliquées à un même point, et dirigées d'une manière quelconque dans l'espace, il faut et il suffit que les sommes des composantes de ces forces, suivant trois axes non situés dans un même plan, soient nulles séparément.*

Fig. 36. Soient P′, P″,... les forces données, appliquées au point A. Si, par ce point, on mène trois axes AX, AY, AZ, et que l'on décompose chacune des forces données, P′ par exemple, en trois autres AX′, AY′, AZ′, dirigées suivant les trois axes, et que nous représenterons par X′, Y′, Z′, on voit que les composantes suivant AX auront

une résultante $X = X' + X'' + \dots$, et que les composantes suivant AY et suivant AZ auront de même les résultantes $Y = Y' + Y'' + \dots$, $Z = Z' + Z'' + \dots$. Or, les trois forces X, Y, Z, qui remplacent les forces données P′, P″...., n'étant pas situées dans un même plan, ne peuvent être en équilibre, à moins qu'on n'ait séparément $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$.

Donc les équations d'équilibre du système proposé sont

$$X' + X'' + \dots = 0,$$
$$Y' + Y'' + \dots = 0,$$
$$Z' + Z'' + \dots = 0.$$

On donnera, dans chacune de ces trois équations, le signe + aux composantes qui agissent dans un certain sens, et le signe — à celles qui agissent dans le sens opposé.

91. REMARQUE I. Dans le cas particulier où les axes AX, AY, AZ sont rectangulaires, les composantes X′, Y′, Z′, sont les projections de P′ sur ces trois axes, et de même pour les autres. Si donc on représente respectivement par α', β', γ', α'', β'', γ'',... les angles formés par les directions des forces P′, P″,... avec les axes AX, AY, AZ, et comptés dans un sens déterminé, à partir de ces axes, on aura, comme au n° 27,

$$X' = P' \cos \alpha', \quad Y' = P' \cos \beta', \quad Z' = P' \cos \gamma', \text{ etc.}$$

Alors ces trois équations d'équilibre deviendront

$$P' \cos \alpha' + P'' \cos \alpha'' + \dots = 0,$$
$$P' \cos \beta' + P'' \cos \beta'' + \dots = 0,$$
$$P' \cos \gamma' + P'' \cos \gamma'' + \dots = 0.$$

Il suffira, comme au n° 86, de regarder toutes les forces P′, P″,... comme positives, et de donner à

$\cos\alpha'$, $\cos\alpha''$,.... les signes qui résultent des règles trigonométriques.

92. Remarque II. Lorsque les forces données ne se font pas équilibre, elles ont toujours une résultante R appliquée au point A, et faisant avec les axes AX, AY, AZ, des angles que nous désignerons par α, 6, γ. Si donc on décompose R en trois forces X, Y, Z, dirigées suivant les trois axes, on aura (27)

$$R = \sqrt{X^2+Y^2+Z^2},$$

$$X = R\cos\alpha, \quad Y = R\cos 6, \quad Z = R\cos\gamma,$$

d'où l'on tire, en substituant à R sa valeur,

$$\cos\alpha = \frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}, \quad \cos 6 = \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}.$$

Ces équations déterminent la direction de la résultante et le sens suivant lequel elle agit.

SECTION III.

ÉQUATIONS D'ÉQUILIBRE DES FORCES PARALLÈLES.

93. Théorème. *Pour qu'il y ait équilibre entre des forces parallèles situées dans un même plan, il faut et il suffit* 1° *que la somme des forces soit nulle;* 2° *que la somme de leurs moments, par rapport à un point quelconque de leur plan, soit également nulle.*

En effet, soient P', P'',.., les forces données. On a vu (42) que ces forces se réduisent, en général, à deux résultantes R', R'', parallèles à leur direction, et agissant en sens contraire l'une de l'autre. Donc, pour que le système proposé soit en équilibre, il faut 1° que les résultantes R', R'' soient égales entre elles; 2° qu'elles agissent suivant une même droite. On doit donc avoir d'abord $R'+R''=0$, ou $P'+P''+\ldots=0$. Mais si les forces R', R'', sont égales et directement opposées, il est clair que leurs moments, par rapport à un point quelconque O de leur plan, seront égaux et de signes contraires, et que, par conséquent, leur somme sera nulle. Or, le moment de chacune des résultantes partielles R' ou R'' égale la somme des moments des composantes qui agissent dans le même sens que cette résultante. Donc la somme des moments de toutes les composantes P', P''..., par rapport au point O, sera nulle, et en désignant par x', x'',... les perpendiculaires abaissées de ce point sur leurs directions, on aura, pour les deux équations d'équilibre,

$$P'+P''+\ldots=0,\quad P'x'+P''x''+\ldots=0.$$

De plus, ces deux équations sont suffisantes pour que l'équilibre ait lieu. Car 1° les résultantes partielles R', R'', agissant en sens contraires, sont nécessairement égales, puisqu'on a $R'+R''=0$; 2° il résulte de la deuxième équation que les moments de R', R'', par rapport à un point O du plan, sont égaux et de signes contraires; et comme on vient de voir que les forces R', R'', sont égales et de signes contraires, il faut donc que leurs distances au point O soient égales et de même signe, c'est-à-dire que les forces R' et R'' agissent suivant une même droite. Ainsi les résultantes partielles sont

égales et directement opposées, et, par conséquent, le système proposé est en équilibre.

94. Remarque I. Tout système, qui satisfait seulement à la première des deux équations d'équilibre, se réduit à un couple.

Car puisqu'on a $P'+P''+\ldots=0$, ou $R'+R''=0$, il est clair que les deux résultantes partielles sont égales. Mais comme l'équation $P'x'+P''x''+\ldots=0$ n'est pas satisfaite, la somme des moments des forces R', R'', par rapport à un point de leur plan, n'est pas nulle. Donc ces forces ne sont pas à la même distance du point dont il s'agit, et, par conséquent, donnent lieu à un couple, puisqu'elles sont égales, parallèles et de sens contraires.

95. Remarque II. Tout système, qui ne satisfait pas à la première des deux équations d'équilibre, a une résultante.

Car la somme des composantes n'étant pas nulle, celle des deux résultantes partielles R', R'', ne l'est pas non plus. Ces deux forces, qui sont parallèles et de sens contraires, ont donc une résultante R, puisqu'elles sont inégales. Or, une force $-R$, égale et directement opposée à R, faisant équilibre au système proposé, on aura (93)

$$-R+P'+P''+\ldots=0, \quad -Rx+P'x'+P''x''+\ldots=0$$

d'où l'on tire

$$R=P'+P''+\ldots, \quad x=\frac{P'x'+P''x''+\ldots}{P'+P''+\ldots}.$$

La première équation détermine la valeur de la résultante et le sens de son action; la seconde détermine sa distance au centre des moments, et sa position par rapport à ce point.

96. Théorème. *Pour qu'il y ait équilibre entre des forces parallèles situées dans l'espace, il faut et il suffit*

1° *que la somme des forces soit nulle; 2° que les sommes de leurs moments, par rapport à deux plans menés par une parallèle à la direction des forces, soient nulles séparément.*

En effet, soient R', R''..., les forces données. Il est clair que le système sera en équilibre, si les deux résultantes partielles et contraires R', R'', auxquelles on peut le réduire (42), sont égales et dirigées suivant une même droite. On doit donc avoir d'abord $R'+R''=0$, ou $P'+P''+\ldots=0$, ce qui donne la première équation d'équilibre. Maintenant, il est clair que les deux forces égales et contraires R', R'', agiront suivant une même droite, si leurs directions sont à la même distance des deux plans ZX, ZY, menés par la droite donnée ZZ', parallèle aux forces. Mais alors les moments des forces R', R'', par rapport à chacun de ces plans, seront égaux et de signes contraires, et, par conséquent, il en sera de même des moments de leurs composantes respectives. Donc la somme des moments de toutes les composantes, par rapport à chacun des plans ZX, ZY, sera nulle séparément. Ainsi, en désignant par x', $x''\ldots$, y', $y''\ldots$, les distances des forces P', P''..., aux plans ZY, ZX, on aura, pour les trois équations d'équilibre du système proposé,

$$P'+P''+\ldots=0,$$
$$P'x'+P''x''+\ldots=0,$$
$$P'y'+P''y''+\ldots=0.$$

Il est d'ailleurs évident que ces équations sont suffisantes; car dès qu'elles sont satisfaites, les deux résultantes partielles, auxquelles se réduit le système proposé, sont égales et situées à la même distance des deux plans ZX, ZY, c'est-à-dire qu'elles agissent suivant une même droite. Le système est donc en équilibre.

Lorsque les forces sont situées dans un même plan, les équations d'équilibre, déjà déterminées directement (93), peuvent se conclure des précédentes, en supposant que l'un des deux plans ZX, ZY, censés perpendiculaires entre eux, se confond avec celui des forces.

97. REMARQUE I. Tout système, qui satisfait seulement à la première des équations ci-dessus, se réduit à un couple, comme dans le cas du n° 94.

Tout système, qui satisfait seulement aux deux premières équations, ou bien à la deuxième et à la troisième, se réduit de même à un couple, dont le plan est, selon le cas, parallèle au plan ZY ou au plan ZX.

98. REMARQUE II. Tout système, qui ne satisfait pas à la première des trois équations ci-dessus, a une résultante. La démonstration est absolument la même que pour le cas du n° 95.

On trouvera de même que la résultante R et ses distances x, y, aux plans ZY, ZX, sont données par les équations

$$R = P' + P'' + \ldots,$$
$$x = \frac{P'x' + P''x'' + \ldots}{P' + P'' + \ldots},$$
$$y = \frac{P'y' + P''y'' + \ldots}{P' + P'' + \ldots};$$

or, si l'on mène, aux deux distances trouvées, deux plans parallèles aux plans ZY, ZX, la direction de la résultante, devant se trouver à la fois dans chacun de ces deux plans, sera donc précisément leur intersection; et comme les mêmes équations indiquent dans quel sens agit la résultante, celle-ci sera donc complétement déterminée.

On voit, en outre, que les deux dernières des équations précédentes peuvent s'énoncer comme il suit:

Lorsque tant de forces parallèles qu'on voudra ont une résultante, sa distance à un plan quelconque parallèle

à la direction commune, est égale à la somme des moments des forces données, divisée par la somme des mêmes forces.

99. Corollaire. Nous avons vu (44) que le *centre* d'un nombre quelconque de forces parallèles est toujours situé sur la direction de la résultante ; par conséquent, on obtiendra la distance de ce centre à un plan parallèle à la direction des forces, comme on obtient celle de la résultante, en divisant la somme des moments, pris par rapport au plan, par la somme des forces.

On trouvera de même la distance du centre à un plan quelconque, en imaginant que toutes les forces se soient tournées parallèlement à ce plan, tout en conservant leurs intensités et leur parallélisme ; la somme des nouveaux moments, divisée par la somme des forces, donnera la distance du centre au nouveau plan.

En répétant la même opération une troisième fois, le centre des forces parallèles sera déterminé par l'intersection de trois plans menés aux trois distances trouvées, parallèlement aux trois premiers.

Dans le cas où les forces données sont égales et de même sens, en appelant n le nombre des forces, l'expression

$$\frac{P'x' + P''x'' + \ldots}{P' + P'' + \ldots}$$

devient

$$\frac{x' + x'' + \ldots}{n}.$$

Donc alors la distance du centre à un plan quelconque, égale la somme de toutes les distances des points d'application divisée par leur nombre, c'est-à-dire, *la distance moyenne* de tous les points d'application.

SECTION IV.

ÉQUATIONS D'ÉQUILIBRE DES FORCES DIRIGÉES D'UNE MANIÈRE QUELCONQUE DANS UN PLAN.

100. Théorème. *Pour qu'il y ait équilibre entre des forces dirigées d'une manière quelconque sur un plan, il faut et il suffit : 1° que les sommes des composantes de ces forces, parallèles à deux axes qui se coupent dans leur plan, soient nulles séparément ; 2° que la somme des moments des forces données, par rapport à un point quelconque de leur plan, soit également nulle.*

Soient P', P''..., les forces données. Pour qu'elles soient en équilibre, il faut et il suffit (46, 3°) que les deux forces R', R'', auxquelles on peut toujours les réduire, et qui sont situées dans le même plan, soient égales et directement opposées.

Cela posé, si l'on décompose chacune des forces R', R'', en deux autres X_1, Y_1, X_2, Y_2, respectivement parallèles à deux axes OX, OY, menés dans le même plan par un point quelconque, il est évident que les composantes de R' seront égales et parallèles aux composantes analogues de R'' et agiront en sens contraires. On aura donc d'abord

$$X_1 + X_2 = 0, \quad Y_1 + Y_2 = 0.$$

Comme, en outre, les forces R', R'' agissent suivant une même droite et en sens opposés, leurs moments M', M'', par rapport au point A, seront égaux et de signes contraires ; ainsi l'on aura

$$M' + M'' = 0.$$

Les trois équations d'équilibre sont donc

$$(1) \qquad X_1+X_2=0,\ Y_1+Y_2=0,\ M'+M''=0;$$

et dès qu'elles sont toutes satisfaites, il est facile d'en conclure que les deux résultantes partielles R', R'' sont égales, contraires et dirigées suivant une même droite.

Mais si l'on décompose chacune des forces données P', P''..., en deux autres X', Y', X'', Y''..., parallèles aux mêmes axes OX, OY, et qu'on désigne par m', m''... les moments de P', P''..., par rapport au point O, on aura (62, 85)

$$X_1+X_2=X'+X''+\ldots,\ Y_1+Y_2=Y'+Y''+\ldots,$$
$$M'+M''=m'+m''+\ldots,$$

et par conséquent les trois équations (1) pourront se remplacer par les trois suivantes

$$(2) \qquad X'+X''+\ldots=0,\ Y'+Y''+\ldots=0,$$
$$m'+m''+\ldots=0;$$

ce qui démontre le théorème énoncé.

101. Remarque I. Tout système, qui satisfait seulement aux deux premières des équations (2), se réduit à un couple, comme dans les cas des nos 94 et 97. Car alors les résultantes partielles R', R'' sont égales, parallèles et de sens contraires.

102. Remarque II. Dans toute autre hypothèse, R' et R'' ne sont pas à la fois égales, parallèles et de sens contraires; donc le système proposé a une résultante unique.

On détermine aisément cette résultante R, en lui opposant directement une force égale —R. Car alors il y a équilibre entre les forces —R, P', P'',... Mais en appelant X et Y les composantes de R parallèles aux axes OX, OY, celles de —R seront —X, —Y, et si m est le moment de R par rapport au point O, celui de —R sera

$-m$. Donc on aura

$$-X+X'+X''+\ldots=0,\quad -Y+Y'+Y''+\ldots=0,$$
$$-m+m'+m''+\ldots=0,$$

d'où

$$X=X'+X''+\ldots,\ Y=Y'+Y''+\ldots,\ m=m'+m''+\ldots$$

Comme les signes des quantités X, Y, m, font toujours connaître le sens d'action des composantes X, Y, et le sens du moment de R, on construira facilement cette ré-
Fig. 37. sultante en menant, par un point quelconque A du plan XOY, deux droites AB, AC, parallèles aux axes OX, OY, et respectivement égales à X et à Y; la diagonale AD du parallélogramme ABDC sera égale et parallèle à R. Maintenant la perpendiculaire OE, menée du point O sur AD, doit rencontrer la direction de R en un point F tel qu'on ait $R.OF=m$. La grandeur et la direction de la résultante seront donc déterminées. On peut d'ailleurs la concevoir appliquée en un point quelconque de sa direction, et c'est pourquoi son point d'application reste indéterminé.

SECTION V.

ÉQUATIONS D'ÉQUILIBRE DES FORCES DIRIGÉES D'UNE MANIÈRE QUELCONQUE DANS L'ESPACE.

---

103. THÉORÈME. *Pour qu'il y ait équilibre entre des forces dirigées d'une manière quelconque dans l'espace, il*

faut et il suffit : 1° que les sommes des composantes de ces forces, parallèles à trois axes menés par un même point, soient nulles séparément; 2° que les sommes des moments des forces données, par rapport à chacun de ces trois axes, soient également nulles séparément.

Soient P′, P″..., les forces données. Pour qu'elles soient en équilibre, il faut et il suffit évidemment que les deux forces R′, R″, auxquelles on peut toujours les réduire, soient égales et directement opposées.

Cela posé, si l'on décompose chacune des forces R′, R″, en trois autres X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2, respectivement parallèles à trois axes OX, OY, OZ, menés par un point quelconque O de l'espace, les composantes de R′ seront égales et parallèles aux composantes analogues de R″, et agiront en sens contraire. On aura donc d'abord

$$X_1+X_2=0,\quad Y_1+Y_2=0,\quad Z_1+Z_2=0.$$

Comme, en outre, les forces R′, R″ agissent suivant une même droite et en sens opposés, il est clair que les moments L_1, M_1, N_1, de R′ par rapport aux axes OX, OY, OZ, seront égaux et de signes contraires aux moments L_2, M_2, N_2, de R″ par rapport aux mêmes axes; et l'on aura

$$L_1+L_2=0,\quad M_1+M_2=0,\quad N_1+N_2=0.$$

Les six équations d'équilibre sont donc

$$(1)\quad \begin{matrix} X_1+X_2=0, & Y_1+Y_2=0, & Z_1+Z_2=0, \\ L_1+L_2=0, & M_1+M_2=0, & N_1+N_2=0; \end{matrix}$$

et dès qu'elles sont toutes satisfaites, il est facile d'en conclure que les deux résultantes partielles R′, R″, sont égales, contraires et dirigées suivant une même droite.

Mais si l'on décompose chacune des forces P′, P″,... en trois autres parallèles aux axes OX, OY, OZ, en dési-

gnant par X, Y, Z, la somme des composantes parallèles à chacun d'eux, et par L, M, N, la somme de leurs moments pris par rapport aux mêmes axes, on aura (62, 85)

$$X_1 + X_2 = X, \quad Y_1 + Y_2 = Y, \quad Z_1 + Z_2 = Z,$$
$$L_1 + L_2 = L, \quad M_1 + M_2 = M, \quad N_1 + N_2 = N,$$

et par conséquent les équations (1) pourront se remplacer par les suivantes

$$(2) \quad X = 0, \; Y = 0, \; Z = 0, \quad L = 0, \; M = 0, \; N = 0,$$

qui sont donc les équations d'équilibre du système P', P''..., conformément à l'énoncé du théorème.

104. Remarque I. Tout système, qui satisfait seulement aux trois premières des équations (2), se réduit à un couple, comme au n° 101. Car puisqu'on a $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$, on a pareillement $X_1 + X_2 = 0$, $Y_1 + Y_2 = 0$, $Z_1 + Z_2 = 0$. Donc les deux résultantes partielles R', R'' sont égales, parallèles et de sens contraires.

Réciproquement, si le système proposé donne lieu à un couple, les résultantes R', R'' sont égales, parallèles et de sens contraires. On a donc $X_1 + X_2 = 0$, $Y_1 + Y_2 = 0$, $Z_1 + Z_2 = 0$, et, par suite, $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$.

Donc *pour qu'un système de forces données dans l'espace se réduise à un couple, il faut et il suffit que les sommes des composantes de ces forces, parallèles à trois axes menés par un même point, soient nulles séparément.*

105. Corollaire. Il suit aussi de là *qu'un nombre quelconque de couples situés dans l'espace se réduisent toujours à un couple unique.* Car les forces P, $-P$, P', $-P'$,..., qui constituent les couples donnés $(P, -P)$, $(P', -P')$..., étant deux à deux égales, parallèles et contraires, on sait que la somme de toutes les composantes de ces forces, parallèles à un axe quelconque, sera nulle. On aura donc $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$.

Transformation des équations d'équilibre.

106. Les six équations d'équilibre (103) d'un système quelconque P', P'',... se remplacent ordinairement par six autres qui ont l'avantage de renfermer d'une manière très-simple les intensités des forces données, les angles que les directions de ces forces font avec les axes, et les coordonnées d'un point de chacune de ces directions.

Pour obtenir ces nouvelles équations, supposons les trois axes OX, OY, OZ rectangulaires entre eux, et désignons par α', $6'$, γ', les angles que la direction de P' fait avec ces axes, on aura (92) pour les valeurs des composantes X', Y' et Z' de P',

$$X' = P' \cos \alpha', \quad Y' = P' \cos 6', \quad Z' = P' \cos \gamma'.$$

De même, en nommant α'', $6''$, γ'', les angles formés par la direction de P'' avec les axes, on aura

$$X'' = P'' \cos \alpha'', \quad Y'' = P'' \cos 6'', \quad Z'' = P'' \cos \gamma'', \text{ etc.,}$$

et les trois premières des équations d'équilibre (103) deviendront, comme dans le cas du n° 91,

$$(1) \quad P' \cos \alpha' + P'' \cos \alpha'' + \ldots = 0,$$
$$(2) \quad P' \cos 6' + P'' \cos 6'' + \ldots = 0,$$
$$(3) \quad P' \cos \gamma' + P'' \cos \gamma'' + \ldots = 0.$$

Si maintenant on représente par x', y', z', les coordonnées d'un point quelconque A de la direction de P', et par n' le moment de cette force par rapport à l'axe OZ, il est évident que la projection A' du point A sur le plan XOY aura pour coordonnées x', y', que la projection de P sur le même plan aura X' et Y' pour composantes parallèles aux axes OX, OY, et que le moment de cette projection par rapport au point O sera n'; on aura donc (67)

$$n' = X'y' - Y'x' = P'(y' \cos \alpha' - x' \cos 6').$$

En adoptant des notations analogues pour la force P'', on aura de même

$$n''=X''y''-Y''x''=P''(y''\cos\alpha''-x''\cos 6'');$$

ainsi de suite.

Or on a représenté par N (103) la somme des moments des forces P', P''...., par rapport à l'axe OZ. Donc la dernière des six équations d'équilibre N = o deviendra

$$(4)\ P'(y'\cos\alpha'-x'\cos 6')+P''(y''\cos\alpha''-x''\cos 6'')+...=0.$$

Les deux autres équations L = o, M = o, transformées de la même manière, deviendront évidemment

$$(5)\ P'(z'\cos 6'-y'\cos\gamma')+P''(z''\cos 6''-y''\cos\gamma'')+...=0,$$
$$(6)\ P'(x'\cos\gamma'-z'\cos\alpha')+P''(x''\cos\gamma''-z''\cos\alpha'')+...=0.$$

107. Corollaire I. *Lorsque les forces données* P', P'',... *ne se font pas équilibre, on peut, au moyen des six équations précédentes, trouver la condition nécessaire et suffisante pour qu'elles aient une résultante unique, et la déterminer.*

En effet, soit, s'il est possible, R la résultante des forces données. Alors une force —R, égale et directement opposée à R, leur fera équilibre, et par conséquent les six équations précédentes devront avoir lieu en y faisant entrer la force —R.

Cela posé, soient x, y, z, les coordonnées d'un point quelconque de la direction de R, et α, 6, γ, les angles qu'elle fait avec les axes OX, OY, OZ. La force —R devra former, avec les mêmes axes, des angles $(200^\circ+\alpha)$, $(200^\circ+6)$, $(200^\circ+\gamma)$, dont les cosinus sont $-\cos\alpha$, $-\cos 6$, $-\cos\gamma$. Donc si, pour abréger, l'on fait

$$
\begin{aligned}
&P' \cos \alpha' + P'' \cos \alpha'' + \ldots . = X, \\
&P' \cos 6' + P'' \cos 6'' + \ldots . = Y, \\
&P' \cos \gamma' + P'' \cos \gamma'' + \ldots . = Z, \\
&P'(z' \cos 6' - y' \cos \gamma') + \ldots = L, \\
&P'(x' \cos \gamma' - z' \cos \alpha') + \ldots = M, \\
&P'(y' \cos \alpha' - x' \cos 6') + \ldots = N,
\end{aligned}
$$

on aura pour les équations d'équilibre du nouveau système

$$
(1) \begin{cases} X - R\cos\alpha = o, \quad Y - R\cos 6 = o, \quad Z - R\cos\gamma = o, \\ L - R(z\cos 6 - y\cos\gamma) = o, \quad M - R(x\cos\gamma - z\cos\alpha) = o, \\ N - R\,(y\cos\alpha - x\cos 6) = o, \end{cases}
$$

et en vertu des trois premières de ces équations, les trois dernières deviendront

$$
(2) \quad L - (Yz - Zy) = o, \; M - (Zx - Xz) = o, \\ N - (Xy - Yx) = o.
$$

Comme les coordonnées x, y, z, peuvent appartenir à un point quelconque de la direction de la résultante, les trois équations (2) sont donc celles de ses projections sur les trois plans coordonnés. Mais si l'on conduit par deux quelconques de ces projections, les deux premières par exemple, deux plans perpendiculaires, l'un à YOZ, l'autre à XOZ, il est clair que l'intersection de ces deux plans donnera la direction de la résultante dans l'espace. Ainsi, deux quelconques des projections de cette droite suffisent pour la déterminer, et la troisième doit nécessairement résulter des deux autres. Par conséquent, pour que la droite existe, il faudra que les trois équations de projection se réduisent à deux. Or si on les ajoute après les avoir multipliées respectivement par X, Y, Z, les coordonnées variables x, y, z, disparaissent, et l'on obtient l'équation

$$
(3) \qquad LX + MY + NZ = o
$$

qui exprime la relation nécessaire et suffisante entre les

6.

résultantes partielles X, Y, Z, et les trois moments partiels L, M, N, pour que les trois équations (2) puissent subsister à la fois, et par conséquent pour que les forces P′, P″, ...aient une résultante unique.

Dès que cette équation de condition est satisfaite, on peut déterminer la résultante R, en intensité et en direction, par les trois premières des équations (1), comme on l'a déjà fait dans le n° 92, et l'on trouvera les mêmes résultats.

Mais il est à remarquer que les valeurs des trois coordonnées x, y, z, se présenteront ici sous la forme $\frac{0}{0}$, parce que la résultante R pouvant être appliquée à un point quelconque de sa direction, le calcul ne peut déterminer l'un de ses points plutôt que tout autre. En effet, les trois équations (2) se réduisent réellement à deux différentes; on n'a donc que deux équations entre les trois variables x, y, z, qui doivent donc rester indéterminées.

Les trois résultantes partielles X, Y, Z, ne peuvent d'ailleurs être nulles à la fois, car le système proposé se réduirait alors à un couple (104).

108. Corollaire II. Tout système, qui ne satisfait pas à l'équation de condition $LX + MY + NZ = 0$, se réduit toujours à deux forces R′, R″ non situées dans un même plan; et *réciproquement*, si les deux forces R′, R″, auxquelles on peut réduire le système proposé, sont situées dans des plans différents, l'équation de condition ne sera pas satisfaite.

Dans ce cas, *il y a une infinité de systèmes de deux forces qui peuvent remplacer les forces proposées.*

En effet, si l'on représente par X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z les composantes des deux forces R′, R″, parallèles aux axes OX, OY, OZ, et par l_1, m_1, n_1, l_2, m_2, n_2, leurs moments par rapport aux mêmes axes, on n'aura, pour déterminer

ces douze quantités que huit équations, savoir : les six équations

$$X_1 + Y_2 = X,\quad Y_1 + Y_2 = Y,\quad Z_1 + Z_2 = Z,$$
$$l_1 + l_2 = L,\quad m_1 + m_2 = M,\quad n_1 + n_2 = N,$$

et les deux équations de condition

$$l_1 X_1 + m_1 Y_1 + n_1 Z_1 = 0,\quad l_2 X_2 + m_2 Y_2 + n_2 Z_2 = 0.$$

Le problème sera donc susceptible d'une infinité de solutions.

109. Remarque. Les six équations d'équilibre, pour des forces dirigées d'une manière quelconque dans l'espace, peuvent servir à retrouver les équations d'équilibre obtenues dans les différents cas déjà traités, par exemple, pour des forces parallèles, ou appliquées à un même point, ou situées dans un même plan, etc. A cet effet, il suffit de mettre à la place des coordonnées x', y', z', et des angles α', β', γ', ... les valeurs qui conviennent au particulier que l'on a en vue. Nous nous bornerons à indiquer cet exercice, qui n'offre aucune difficulté quand on a bien saisi ce qui précède.

CHAPITRE III.

CONDITIONS D'ÉQUILIBRE POUR DES FORCES APPLIQUÉES A UN CORPS NON ENTIÈREMENT LIBRE DANS L'ESPACE.

—

110. Nous avons vu (103) que les six équations d'équilibre, pour un corps ou système sollicité par des forces quelconques, sont: $X=0, Y=0, Z=0, L=0, M=0, N=0$. Cette détermination suppose tacitement que le corps, auquel les forces sont appliquées, est entièrement libre dans l'espace. Nous allons maintenant examiner comment ces équations se modifient, lorsque certains points du corps sont fixes et opposent une résistance invincible à l'action des forces qui peuvent y être appliquées.

Nous distinguerons trois cas principaux, auxquels il est facile de ramener tous les autres, savoir :

1° *Le corps n'a qu'un point fixe*, et par conséquent peut tourner en tout sens autour de ce point.

2° *Le corps a deux points fixes*, et ne peut ainsi tourner qu'autour de la ligne menée par ces deux points.

3° *Le corps a trois points fixes*, ou, ce qui revient au même, s'appuie, par un ou plusieurs points, contre un plan inébranlable.

§ 1. — DE L'ÉQUILIBRE D'UN CORPS, DONT UN SEUL POINT EST FIXE.

111. Théorème. *Pour que des forces, appliquées à un corps dont un point est fixe, se fassent équilibre, il faut et il suffit que les sommes de leurs moments, par rapport à trois axes rectangulaires menés par ce point, soient nulles séparément.*

Soient les forces $P, P', P'', \ldots$ appliquées à un corps dont un point A est fixe. Quoique le point A ne puisse par lui-même produire le moindre effort, néanmoins il est clair que toute force R appliquée à ce point sera détruite par sa résistance; celle-ci fait donc l'effet d'une force $-R$ égale et directement opposée à R. Ainsi, dans la recherche des conditions d'équilibre, nous pourrons substituer au point fixe une force $-R$ appliquée à ce point, cette force ayant d'ailleurs une direction et une intensité quelconques, puisque la résistance du point A est censée indéfinie dans tous les sens. Les conditions d'équilibre des forces $P, P', \ldots$ seront donc les mêmes que celles des forces $-R, P, P', \ldots$ appliquées à un corps entièrement libre.

Concevons trois axes rectangulaires AX, AY, AZ, menés par le point A, et décomposons la force $-R$ en trois autres $-X'$, $-Y'$, $-Z'$, parallèles à ces axes. Comme la force $-R$ passe par le point A, sa distance à chacun des trois axes est nulle. Ses moments par rapport aux mêmes axes sont donc nuls séparément, et les sommes L, M, N des moments des forces $P, P' \ldots$, par rapport aux mêmes axes, resteront les mêmes après l'introduction de la force $-R$ dans le système. Les six équations d'équilibre seront donc

$$X - X' = 0, \quad Y - Y' = 0, \quad Z - Z' = 0,$$
$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0,$$

Mais la force $-R$ étant tout à fait arbitraire, on peut toujours choisir les valeurs des composantes $-X'$, $-Y'$, $-Z'$, de manière à satisfaire aux trois premières équations; par conséquent, les équations d'équilibre se réduisent en définitive aux trois suivantes

$$L=0, \quad M=0, \quad N=0,$$

conformément à l'énoncé du théorème.

112. Corollaire I. Les forces proposées se font donc équilibre, lorsque ces trois équations ont lieu; mais alors l'équation de condition $LX+MY+NZ=0$ (107) étant aussi satisfaite, les forces proposées ont donc une résultante, et pour que l'équilibre puisse alors exister, il faut que sa direction passe par le point fixe A. En effet, comme les moments de la résultante par rapport aux trois axes AX, AY, AZ, sont nuls séparément, et comme, d'ailleurs, toute force, dont le moment par rapport à un axe est nul, doit nécessairement rencontrer cet axe ou lui être parallèle, il est clair que la direction de la résultante, ne pouvant être parallèle qu'à l'un des trois axes, doit rencontrer les deux autres, et par conséquent passer par leur point d'intersection.

De là résulte cet autre énoncé du théorème précédent:

Pour que des forces appliquées à un corps, dont un point est fixe, se fassent équilibre, il faut et il suffit qu'elles aient une résultante unique passant par le point fixe.

Au reste, il est facile de démontrer directement le théorème ainsi présenté, en remarquant que les forces proposées peuvent toujours être remplacées par deux forces R′, R″, dont l'une R′ soit appliquée au point fixe A (54), et par conséquent détruite. Pour que l'équilibre ait lieu, il faut donc que la force R″, à laquelle se réduit le système proposé, passe aussi par le point A. D'où il

résulte que le système sera en équilibre, s'il a une résultante appliquée au point A.

On voit en même temps que, dans tous les cas, un système de forces quelconques, appliquées à un corps qui a un point fixe, peut être mis en équilibre à l'aide d'une seule force. Car, après la réduction qu'on vient d'indiquer, il suffira d'introduire dans le système une force égale et directement opposée à R''.

De la pression exercée sur le point fixe.

113. Corollaire II. Lorsque les forces proposées ont une résultante unique passant par le point fixe, il n'est pas nécessaire, pour l'équilibre du système, que la résistance du point soit indéfinie; elle doit seulement égaler la résultante des forces, dont l'intensité détermine donc, dans chaque cas particulier, la résistance dont le point fixe doit être susceptible. Cette résistance, ainsi déterminée et prise en sens contraire, est ce que l'on nomme la *pression* exercée sur le point d'appui par les forces du système. Or toutes ces forces, transportées parallèlement à elles-mêmes pour être appliquées au point fixe, auront encore (61) la même résultante qu'auparavant; d'où il résulte que

La pression exercée sur le point fixe est égale à la résultante de toutes les forces données transportées parallèlement à elles-mêmes au point fixe.

§ 2. — DE L'ÉQUILIBRE D'UN CORPS QUI A DEUX POINTS FIXES.

114. Théorème. *Pour qu'il y ait équilibre entre des forces appliquées à un corps, uniquement susceptible de tourner autour de l'axe mené par deux points fixes, il faut et il suffit que la somme des moments des forces, par rapport à cet axe, soit nulle.*

Fig. 38. Soient les forces P, P', P'',...appliquées à un corps ABC, dont les deux points A, B, sont liés entre eux d'une manière invariable par la ligne AB, et ne peuvent d'ailleurs glisser le long de cette ligne. Dès lors le corps ne pourra prendre qu'un mouvement de rotation autour de l'axe fixe AB, ce qu'on exprime en disant que le corps est *assujetti à tourner autour de l'axe* AB.

Désignons par $-R'$, $-R''$, les forces dont les points fixes A, B peuvent tenir lieu par leurs résistances; nous pourrons considérer le corps comme entièrement libre dans l'espace et soumis à l'action des forces $-R'$, $-R''$, P, P',...Soient les trois axes rectangulaires AX, AY, AZ qui se coupent au point A, et dont l'un AX passe, en outre, par l'autre point fixe B. Nommons $-X'$, $-Y'$, $-Z'$, $-X''$, $-Y''$, $-Z''$, les composantes des forces $-R'$, $-R''$ suivant ces axes, et désignons la distance AB par D. La force $-R'$ étant immédiatement appliquée au point A, ses moments, par rapport aux axes, seront nuls. Les moments de la force $-R''$ par rapport aux axes AX, AY, AZ, seront $o, -DY'', -DZ''$. Donc en désignant, comme à l'ordinaire, par X, Y, Z, L, M, N, les sommes des composantes et des moments des forces proposées par rapport aux mêmes axes, on aura, pour les six équations d'équilibre du nouveau système,

$$X-X'-X''=o,\quad Y-Y'-Y''=o,\quad Z-Z'-Z''=o,$$
$$L=o,\quad M-DY''=o,\quad N-DZ''=o.$$

Mais en supposant la résistance des deux points fixes indéfinie en tous sens, on pourra toujours choisir les valeurs des composantes de $-R'$ et de $-R''$ de manière à satisfaire aux trois premières équations et aux deux dernières. Par conséquent les équations d'équilibre se réduiront en définitive à la suivante

$$L=o,$$

conformément à l'énoncé du théorème.

115. Remarque I. *Lorsque des forces quelconques sont appliquées à un corps assujetti à tourner autour d'un axe fixe, on peut toujours leur faire équilibre au moyen d'une seule force située dans un plan perpendiculaire à l'axe.*

Car si l'on remplace les forces proposées par deux systèmes de composantes, les unes parallèles à l'axe fixe AB, les autres situées dans un plan MN perpendiculaire à cet axe, les premières seront détruites par la résistance de l'axe, et les autres se réduiront à deux forces dont l'une peut être appliquée au point d'intersection de l'axe et du plan MN. Il ne restera donc que la seconde force située dans le même plan.

116. Remarque II. Si les deux points A, B du corps, au lieu d'être entièrement fixes, peuvent glisser ensemble dans la direction AB, en conservant toujours la même distance, leurs résistances X', X'', dans le sens de l'axe AX, s'annulent d'elles-mêmes, et la première des six équations ci-dessus (114) devient $X=0$. Par conséquent, pour que l'équilibre ait lieu, les forces proposées doivent satisfaire aux deux équations

$$X=0, \quad L=0.$$

Ce théorème peut s'énoncer ainsi :

Pour qu'il y ait équilibre entre des forces quelconques appliquées à un corps assujetti à tourner autour d'un axe fixe, et pouvant en outre glisser le long de cet axe, il faut et il suffit 1° que la somme des composantes des forces données, parallèles à l'axe fixe, soit nulle; 2° que la somme des moments des forces données, par rapport au même axe, soit pareillement nulle.

Des pressions exercées par les forces sur les deux points fixes du corps en équilibre.

117. Corollaire. Les pressions exercées sur les deux

points fixes A, B sont, d'après ce qu'on a vu plus haut (113), les résistances de ces points prises en sens contraires, et par conséquent égalent les forces R', R'' (114). Ainsi, pour déterminer leurs six composantes X', Y', Z', X'', Y'', Z'', on a les cinq équations

$$X - X' - X'' = 0, \quad Y - Y' - Y'' = 0, \quad Z - Z' - Z'' = 0,$$
$$M - DY'' = 0, \quad N - DZ'' = 0,$$

la sixième équation d'équilibre $L = 0$ ne contenant aucune de ces composantes.

On a donc cinq équations entre six inconnues, ce qui semble indiquer au premier abord que les pressions R', R'', sont indéterminées, ou qu'on peut prendre à volonté l'une de leurs six composantes. Mais comme les deux inconnues X', X'' n'entrent que dans la première équation, on voit que les quatre équations restantes suffiront pour déterminer les quatre autres inconnues.

En effet les deux dernières équations donnent

$$Y'' = \frac{M}{D}, \quad Z'' = \frac{N}{D};$$

substituant ces valeurs dans les autres, on en déduit

$$Y' = \frac{DY - M}{D}, \quad Z' = \frac{DZ - N}{D}.$$

Ainsi les forces Y', Z', Y'', Z'', c'est-à-dire les composantes des pressions perpendiculaires à l'axe AB, seront déterminées par les quatre équations précédentes, et il ne restera que les deux indéterminées X', X'', ou les composantes des pressions suivant AB, dont la première équation $X' + X'' = X$ fera seulement connaître la somme, qui est une quantité constante égale à X.

Chacune des pressions perpendiculaires à l'axe sera d'ailleurs déterminée en intensité et en direction au moyen de ses deux composantes, comme on l'a vu plus haut (89).

Ces résultats peuvent s'énoncer comme il suit :

Lorsque des forces appliquées à un corps, qui a deux points fixes, se font équilibre, les pressions exercées sur ces points perpendiculairement à l'axe sont déterminées en intensité et en direction ; et les pressions exercées sur les mêmes points, dans le sens de l'axe, sont indéterminées séparément, mais sont une somme constante égale à la somme des composantes des forces données, parallèles à l'axe.

L'indétermination des pressions exercées sur les deux points fixes, suivant l'axe, provient de ce que ces points, censés unis par une verge inflexible, se prêtent un appui mutuel. Chacun d'eux a donc toujours, soit par lui-même, soit par le concours de l'autre, la quantité de résistance nécessaire à l'équilibre, lorsque toutefois la somme des deux résistances suffit. Or c'est précisément cette communauté de résistance qui ne permet pas d'assigner, par le calcul, la portion exercée isolément par chacun des deux points fixes.

§ 3. — DE L'ÉQUILIBRE D'UN CORPS DONT UN OU PLUSIEURS POINTS S'APPUIENT CONTRE UN PLAN INÉBRANLABLE.

118. LEMME. *Un plan fixe ne peut détruire que les forces dont les directions lui sont perpendiculaires.*

En effet, soit une force R qui presse un point A contre un plan MN. On peut toujours la concevoir décomposée en deux autres, l'une AP, perpendiculaire ou *normale* au plan, l'autre AQ située dans ce plan. La première est nécessairement détruite par la résistance du plan, car la direction de la force AP faisant des angles égaux avec toutes les droites telles que AQ, menées par le point A dans le plan MN, il n'y a pas de raison pour que le point A se meuve dans la direction de l'une plutôt que dans la direction des autres. Mais la seconde composante AQ conserve tout son effet, parce que son ac- Fig. 39.

tion ne peut être altérée par la résistance du plan le long duquel elle s'exerce. Donc un plan fixe ne peut détruire que les forces dont les directions lui sont perpendiculaires, et par conséquent la résistance qu'il oppose en un de ses points a le même effet qu'une force normale appliquée à ce point.

119. Corollaire. Il suit de là que pour déterminer les conditions d'équilibre de forces appliquées à un corps s'appuyant contre un plan fixe par plusieurs points, on peut remplacer la résistance des points d'appui par des forces normales au plan et appliquées à ces mêmes points avec des intensités indéfinies.

120. Remarque. Lorsqu'un corps s'appuie contre un plan par un nombre quelconque de points, on peut toujours construire un polygone *convexe*, ayant pour sommets plusieurs de ces points, et renfermant tous les autres dans son intérieur. En effet, on joindra d'abord deux points A, B, pris de manière que la droite AB laisse tous les autres points d'un même côté; on joindra de même le point B à un troisième point C choisi de manière que la droite BC laisse d'un même côté tous les points restants. Ainsi de suite jusqu'à ce qu'on retombe sur le point A.

121. Théorème. *Pour qu'il y ait équilibre entre des forces appliquées à un corps s'appuyant contre un plan fixe par un nombre quelconque de points, il faut et il suffit que ces forces se réduisent à une seule, normale au plan, pressant le corps contre le plan, et le rencontrant en un point situé dans l'intérieur du polygone (convexe) déterminé par les points d'appui.*

1re *Démonstration.* — Soient les forces P, P′, P″,... appliquées au corps ABC... s'appuyant contre un plan fixe par les points A, B, C...,les résistances opposées par ce plan aux points A, B, C,...pourront (119) être représentées par des forces r, r', r'',... normales au plan, et ten-

dant à en éloigner le corps ABC... Mais ces forces r, r', r''..., étant parallèles et de même sens, auront une résultante R également normale au plan qu'elle rencontrera dans l'intérieur du polygone formé par les points d'application des composantes. Ainsi nous pourrons considérer le corps comme entièrement libre dans l'espace, et soumis à l'action des forces R, P, P', P'',... Par conséquent, dans le cas d'équilibre, les forces données P, P', P'',... auront une résultante, égale et directement opposée à R; ce qui démontre le théorème.

On voit d'ailleurs que la condition énoncée suffit pour assurer l'équilibre, puisqu'on peut disposer à volonté des résistances indéfinies r, r', r''..., de manière que leur somme soit égale et directement opposée à la résultante des forces données.

IIe *Démonstration.* — Concevons trois axes rectangulaires AX, AY, AZ, dont deux AX, AY soient menés dans le plan fixe, l'axe AX passant, en outre, par deux points d'appui A et B, tels que cet axe laisse tous les autres points d'appui d'un même côté. Désignons par X, Y, Z, les sommes des composantes des forces données, parallèles aux trois axes, et par L, M, N, les sommes des moments des forces, par rapport aux mêmes axes AX, AY, AZ. Puisque les résistances r, r', r'',... sont normales au plan XAY, leurs composantes parallèles aux axes AX, AY, seront nulles, et les moments de r, r', r'',... par rapport à l'axe AZ, seront pareillement nuls. Par conséquent, si l'on désigne par l, m, les sommes des moments de ces forces par rapport aux axes AX, AY, on aura pour les six équations d'équilibre du système total P, P', P'',... r, r', r'',... Fig. 40.

$$X=0,\quad Y=0,\quad Z+r+r'+r''+\ldots=0,$$
$$L+l=0,\quad M+m=0,\quad N=0.$$

Ces équations montrent que les forces proposées doivent avoir une résultante unique R, puisque l'équation de condition $LX + MY + NZ = 0$ (107) est satisfaite, et que les trois sommes X, Y, Z, ne sont pas nulles à la fois.

Les deux premières équations $X = 0$, $Y = 0$, nous apprennent que la résultante R n'a pas de composantes parallèles aux axes AX, AY, ou, en d'autres termes, qu'elle est perpendiculaire au plan fixe; et la troisième équation $Z + r + r' + r'' + \ldots = 0$ montre qu'elle peut avoir telle valeur qu'on voudra, pourvu qu'elle ne soit pas positive. Par conséquent, la résultante tend à presser le corps contre le plan fixe.

Enfin, il résulte de l'équation $L + l = 0$, que la direction de R rencontre le plan XAY en un point K situé dans l'intérieur du polygone convexe ABCD... En effet, si l'on représente par y, d'', d''',... les perpendiculaires abaissées des points K, C, D,... sur l'axe AX, les moments des forces R, r'', r'''...,par rapport à cet axe, seront Ry, $r''d''$, $r'''d'''$,... On ne met pas les moments des forces r, r', qui sont nuls, l'axe AX passant par les points A et B où ces forces sont appliquées. Ainsi l'équation $L + l = 0$ deviendra

$$Ry + r''d'' + r'''d''' + \ldots = 0;$$

d'où l'on tire, à cause de $R = Z = -(r + r' + \ldots)$,

$$y = \frac{r''d'' + r'''d''' + \ldots}{r + r' + \ldots}.$$

Or les résistances parallèles r, r',... étant toutes positives, et les distances d'', d''',... devant toutes être de même signe, puisque les points C, D,... sont, par hypothèse, tous placés d'un même côté de l'axe AX, il en résulte que la distance y sera de même signe que d'', d''',..., et que par conséquent le point K sera situé, par rapport à l'axe AX mené par les deux points d'appui

A et B, du même côté que les autres points C, D,... Or, si l'on prend pour axe des x toute autre droite, telle que BC, CD,... qui, joignant deux points d'appui, laisse tous les autres d'un même côté, on démontrera, comme tout à l'heure, que le point K doit se trouver, par rapport à chacune de ces lignes, du même côté que les autres points d'appui; d'où il résulte que ce point K doit nécessairement tomber dans l'intérieur du polygone déterminé par les points d'appui.

122. COROLLAIRE I. Dans le cas où le corps s'appuie contre le plan fixe par un seul point, il faut et il suffit, pour l'équilibre, que les forces données se réduisent à une seule force perpendiculaire sur le plan au point d'appui, et pressant le corps contre ce plan.

Si le corps s'appuie par deux points A, B, contre le plan fixe, il faut que la résultante le rencontre en un point de la droite AB, situé entre A et B.

Des pressions exercées par la résultante des forces du système sur les points d'appui.

123. COROLLAIRE II. Dans l'état d'équilibre, *les pressions exercées sur les points d'appui* A, B, C,... ne sont autre chose que des forces égales et contraires aux résistances r, r', r'',... dont ces points ont besoin pour l'équilibre. Ainsi, pour les déterminer, on n'aura que les trois équations

$$Z+r+r'+r''+\ldots=0,\quad L+l=0,\quad M+m=0,$$

ou bien

$$Z+r+r'+r''+\ldots=0,\quad L+r''d''+r'''d'''+\ldots=0,$$
$$M+r'\delta'+r''\delta''+\ldots=0;$$

en désignant comme ci-dessus par d'', d''',... les distances des points C, D,... à l'axe AX, et par δ', δ'',... celles des points B, C,... à l'axe AY.

Or les résistances r, r', r'',... ne devant satisfaire qu'aux trois équations précédentes et, en outre, à la condition d'être toutes positives, il est clair que les pressions, qui leur sont également contraires, restent indéterminées quand il y a plus de trois points d'appui. On pourra donc se donner à volonté toutes les pressions des points d'appui, moins trois d'entre elles que l'on calculera par les équations ci-dessus, en n'admettant toutefois aucune hypothèse qui donnerait pour l'une des pressions une valeur positive. Lorsqu'il n'y a que trois points d'appui, les trois équations précédentes ne déterminent les pressions que si les points donnés ne sont pas en ligne droite. Car si le point C se trouvait avec les deux autres A et B sur l'axe AX, on aurait $d''=0$, et par conséquent r'' disparaîtrait de l'équation $L+r''d''=0$. Alors il ne resterait que deux équations pour calculer les trois inconnues r, r', r'', qui seraient donc encore indéterminées.

124. REMARQUE I. Cette indétermination est tout à fait analogue à celle dont il a été fait mention plus haut (117). Car à cause de l'inflexibilité parfaite du plan contre lequel s'appuie le corps par les points A, B, C, D,..., censés invariables entre eux, il est facile d'imaginer que certaines parties des pressions, exercées par le plan contre ces points, peuvent être reportées des unes aux autres, sans que l'équilibre soit troublé; on voit dès lors qu'on ne peut assigner les valeurs particulières de ces pressions, ni préciser les points où elles s'exercent de préférence, sans détruire l'inflexibilité qui résulte, pour le plan, de la figure invariable du corps ABCD... La théorie montre en effet que les résistances particulières des points d'appui doivent seulement satisfaire en commun aux trois équations ci-dessus, et que par conséquent si, dans les limites déterminées par ces équations, on répartit individuellement les pressions sur ces différents points,

chacun d'eux aura toujours, soit par lui-même, soit par le concours des autres, la quantité de résistance nécessaire pour annuler la pression qu'on lui suppose.

Ainsi disparaît une difficulté qui a beaucoup embarrassé d'Alembert, et qui consiste en ce que les pressions des points d'appui sont indéterminées d'après la théorie, comme on vient de le voir, tandis que si l'on conçoit un corps appuyé contre un plan par plusieurs points, et maintenu en équilibre par une force perpendiculaire au plan, il est bien clair que chaque point d'appui doit nécessairement se trouver pressé, et par conséquent éprouver une pression complétement déterminée.

L'indétermination aurait lieu en effet si le point d'appui, une table par exemple, était rigoureusement inflexible; mais tel n'est jamais le cas de la nature, et quelque peu flexible qu'on suppose le plan, il se déformera toujours un peu et se comprimera inégalement dans ses différentes parties. Or la quantité de déformation et de pression en chaque point du plan dépendra non-seulement des forces du système, mais encore du nombre et de la disposition des points d'appui; et quoique les pressions individuelles de ces points soient bien complétement déterminées dans chaque cas particulier, il faudrait, pour obtenir autant d'équations qu'il y a de points de contact, et déterminer ainsi leurs pressions, savoir tenir compte des propriétés physiques en vertu desquelles la pression totale se distribue dans les diverses pressions particulières. Or l'on n'a pas encore donné la solution générale de cette question très-difficile de physique.

125. Remarque II. La pression se calcule simplement dans les trois cas suivants :

1° Lorsque le corps s'appuie contre le plan par un seul point A, la pression exercée en ce point est égale à la résultante du système proposé.

2° Lorsque le corps s'appuie par deux points A, B, la résultante R rencontre la droite AB en un point O, situé entre A et B. Alors les pressions r, r' sont données par les proportions :

$$r:R::OB:AB,\quad r':R::OA:AB.$$

Fig. 41. 3° Lorsque le corps s'appuie par trois points A, B, C, non en ligne droite, la résultante R rencontre le plan fixe en un point O, situé dans l'intérieur du triangle ABC. Or si l'on mène, par l'un des sommets A et par le point O, une droite AO prolongée jusqu'à sa rencontre en D avec le côté opposé BC, en décomposant la résultante R en deux forces parallèles à sa direction, de même sens, et appliquées aux points A, D, on déterminera leurs intensités r, F par les deux proportions

$$r:R::OD:AD,\quad F:R::AO:AD.$$

Décomposant pareillement la force F en deux autres parallèles à sa direction, de même sens, et appliquées aux points B, C, on déterminera leurs intensités r', r'' par les deux proportions

$$r':F::DC:BC,\quad r'':F::BD:BC.$$

On aura donc la valeur des pressions r, r', r'' exercées aux trois points d'appui A, B, C.

§ 4. *De l'équilibre d'un corps s'appuyant contre plusieurs plans à la fois.*

126. Il est facile d'appliquer les considérations précédentes à l'équilibre d'un corps qui s'appuie à la fois contre plusieurs plans. Car les résistances des plans peuvent se remplacer par des forces normales à ces plans, susceptibles d'une intensité infinie, et appliquées à des points situés dans l'intérieur des polygones déterminés par les points d'appui. Si donc on exprime qu'il y a équilibre

entre les forces proposées et des forces normales aux plans fixes, agissant en sens contraire de la pression exercée aux divers points d'appui, on aura les équations auxquelles le système proposé devra satisfaire pour que l'équilibre ait lieu.

§ 5. *De l'équilibre d'un point assujetti à rester sur une ligne ou sur une surface donnée.*

127. Théorème. *Pour qu'un point sollicité par des forces quelconques et assujetti à rester sur une ligne courbe donnée, soit en équilibre, il faut et il suffit que la résultante des forces soit normale à la courbe, c'est-à-dire perpendiculaire à la tangente menée en ce point.*

Car soit le point M assujetti à rester sur la courbe AB, et soit R la résultante des forces qui lui sont appliquées. Comme la tangente TT′, menée à la courbe au point M, a la même direction que l'élément rectiligne situé en ce point, les conditions d'équilibre du point M doivent être les mêmes que s'il était assujetti à décrire la tangente TT′. Or, si la direction de la résultante R fait deux angles droits avec la tangente, il n'y pas de raison pour que le point M se meuve du côté MT, plutôt que du côté MT′, et, par conséquent, il restera en équilibre. Fig. 42.

Cette condition est d'ailleurs suffisante. Car si la résultante R avait une direction oblique, par rapport à la tangente MT, elle se décomposerait en deux forces, l'une normale MR′, qui serait détruite comme on vient de le dire, et l'autre MT, qui ferait mouvoir le point M, suivant cette tangente. Fig. 43.

128. Théorème. *Pour qu'un point sollicité par des forces quelconques, et assujetti à rester sur une surface courbe, soit en équilibre, il faut et il suffit que la résultante des forces soit normale à la surface, c'est-à-dire au plan tangent mené à la surface en ce point.*

En effet, comme le point M peut se mouvoir sur toutes les lignes tracées par ce point sur la surface, il faut, pour qu'il soit en équilibre, que la résultante des forces données soit à la fois perpendiculaire aux tangentes menées à toutes ces courbes par le point M, et, par conséquent, au plan tangent mené à la surface par ce point.

Cette condition est d'ailleurs suffisante; car si la résultante avait une direction oblique par rapport au plan tangent, elle se décomposerait en deux forces, l'une normale au plan, et qui serait détruite, l'autre dirigée suivant la tangente à l'une des courbes, et qui aurait tout son effet.

129. Remarque. Lorsqu'un corps, sollicité par des forces quelconques, s'appuie en différents points contre une ou plusieurs surfaces courbes, on déterminera les équations d'équilibre, en cherchant, au moyen des équations des surfaces, celles des plans tangents ou des normales aux divers points de contact, et en introduisant, dans les six équations générales de l'équilibre d'un corps entièrement libre, autant de forces indéterminées dirigées suivant ces normales.

CHAPITRE IV.

DES CENTRES DE GRAVITÉ.

§ 1. *Considérations générales sur les corps pesants et sur les centres de gravité.*

130. Dans tout ce qui précède, nous avons fait abstraction de la pesanteur des corps; nous allons maintenant avoir égard à cette propriété générale de la matière, et faire voir comment les principes établis plus haut s'appliquent à l'équilibre des corps, tels qu'on les rencontre dans la nature.

On appelle *pesanteur* ou *gravité* la cause inconnue qui précipite les corps vers la surface de la terre, aussitôt qu'ils cessent d'être soutenus.

La pesanteur, étant une cause de mouvement, peut donc être regardée comme une force. Son action pénètre intimement les masses des corps, et s'exerce séparément sur toutes leurs molécules, comme si elles étaient simplement en contact. Car on sait que, dans le vide, une balle de plomb et le plus petit morceau de liége, par exemple, tombent de la même hauteur avec la même vitesse. Ainsi, l'action de la pesanteur peut être représentée par des forces appliquées à tous les points matériels du corps. Il ne reste donc à déterminer que leurs *directions* et leurs *intensités*.

La *direction* de la pesanteur est indiquée par celle que suivent les corps, en tombant librement aussitôt qu'on

les abandonne à eux-mêmes. Elle est très-bien représentée par un fil à plomb en équilibre, ou par la perpendiculaire à la surface des eaux tranquilles. Cette direction est ce qu'on nomme la *verticale* du lieu, et tout plan perpendiculaire à la verticale se nomme plan *horizontal*.

Les directions de la pesanteur, en différents lieux de la terre, concourent sensiblement vers son centre, à cause de la forme à peu près sphérique de sa surface. Mais comme les corps que l'on considère ordinairement dans la Statique ont des dimensions minimes, par rapport au rayon terrestre, qui égale 636 myriamètres, en nombres ronds, on peut, sans erreur sensible, regarder comme parallèles deux verticales peu éloignées qui vont se rencontrer à une aussi grande distance.

L'*intensité* de la pesanteur varie à la surface de la terre avec la latitude, depuis l'équateur où elle est la plus petite, jusqu'au pôle où elle est la plus grande. Elle varie aussi, sur une même verticale, avec l'élévation au-dessus de la surface terrestre, et diminue en raison inverse du carré des distances au centre du globe. Mais comme ces variations ne deviennent sensibles que pour des changements très-considérables en latitude et en hauteur, nous pouvons les supposer nulles dans la Statique.

Ainsi, dans tout ce qui va suivre, nous regarderons tout corps pesant comme composé de molécules égales, sollicitées par de petites forces égales, parallèles et de même sens. Nous pourrons donc appliquer aux forces provenant de la pesanteur, les mêmes raisonnements qu'à un système de points matériels liés entre eux d'une manière invariable.

131. Il résulte immédiatement de là que, pour un corps quelconque, 1° *la résultante de toutes les actions parallèles de la pesanteur est parallèle à leur direction commune, c'est-à-dire est verticale;* 2° *qu'elle est égale à leur somme.*

L'intensité de cette résultante est ce qu'on nomme le *poids* du corps. Il est facile de voir que ce poids est indépendant de la forme ou de la figure du corps, mais proportionnel au nombre de molécules matérielles dont il se compose, ou à la quantité de matière qu'il renferme, et qu'on appelle sa *masse*.

Ainsi le mot *pesanteur* ou *gravité* désigne la cause qui attire les corps vers la terre; et le mot *poids* exprime la force particulière qui en résulte pour chacun d'eux, ou l'effort qu'il faut déployer pour les soutenir.

De plus, il est évident que, pour des corps homogènes, le poids est proportionnel au volume.

132. Nous avons vu (44) que, pour tout système de forces parallèles et de même sens, il existe un point unique nommé *centre des forces parallèles*, et par lequel passent toutes les résultantes successives du système des forces, lorsqu'on les fait tourner autour de leurs points d'application, tout en conservant leur parallélisme. Mais si, au lieu de faire varier la direction commune des forces, le corps restant fixe, on suppose cette direction constante, ce qui est le cas de la pesanteur, et qu'on fasse tourner le corps dans l'espace, il est clair que la résultante passera toujours par le même point du corps. Or, dans les diverses positions qu'on peut faire prendre à un corps pesant, les forces de la pesanteur restent les mêmes et agissent aux mêmes points, sans cesser d'être parallèles. Il existe donc, dans tout corps pesant, un point unique par lequel la direction du poids passe toujours, de quelque manière qu'on tourne ce corps dans l'espace. Ce point remarquable est ce qu'on nomme le *centre de gravité*.

133. Le centre de gravité d'un corps n'est donc autre chose que le centre des forces parallèles de la pesanteur, appliquées à tous ses points matériels. Par con-

séquent, il résulte de ce qu'on a établi plus haut (99) que *la distance du centre de gravité à un plan quelconque est égale à la moyenne distance de tous les points matériels du corps au même plan.*

Ainsi la position du centre de gravité dans les corps ne dépend nullement de l'intensité de la pesanteur, mais uniquement de la manière dont les points matériels sont disposés les uns par rapport aux autres; ou, en d'autres termes, le centre de gravité, pour les corps homogènes, est le même que le *centre de figure.*

134. Si le centre de gravité d'un corps soumis à la seule action de la pesanteur est supposé fixe, il est clair que le corps sera en équilibre dans toutes les positions possibles autour de ces points; car, dans quelque position que ce soit, la résultante de toutes les forces de la pesanteur passera par le même point fixe, et, par conséquent, son effet sera détruit.

De là résulte un moyen très-simple de trouver le centre de gravité d'un corps de forme quelconque, homogène ou hétérogène. On le suspend à un point fixe, au moyen d'un fil dont l'extrémité inférieure est attachée à un point de sa surface, et l'on attend qu'il soit en équilibre. Alors le poids du corps, qui est une force verticale appliquée à son centre de gravité, a la même direction verticale que le fil, et se trouve détruit par la résistance du point fixe, comme s'il y était immédiatement appliqué. Le prolongement du fil va donc, dans l'état d'équilibre, passer par le centre de gravité du corps. Il en sera encore de même, si l'on attache l'extrémité inférieure du fil à un autre point de la surface du corps; et, par conséquent, l'emplacement de son centre de gravité sera déterminé par l'intersection des prolongements du fil tracés successivement dans l'intérieur du corps dans ces deux positions.

135. Si l'on conçoit qu'on ait remplacé toutes les actions de la pesanteur qui s'exercent sur un corps, par leur résultante appliquée au centre de gravité, laquelle produit identiquement le même effet, il est clair qu'on pourra considérer le centre de gravité comme un point où toute la masse du corps est concentrée. A l'aide de cette observation, on simplifie beaucoup la solution des problèmes où l'on veut avoir égard à la pesanteur. Car si l'on regarde chaque corps d'un système quelconque comme réduit à son centre de gravité, censé sollicité par une force égale et parallèle au poids du corps, en combinant ces nouvelles forces avec les autres forces données, on pourra, d'après les théories précédentes, obtenir les conditions d'équilibre, absolument de la même manière que si tous les corps du système étaient sans pesanteur.

Il ne reste donc plus qu'à faire voir comment on peut déterminer les centres de gravité des différents corps ou systèmes qu'on peut avoir à considérer.

§ 2. *Détermination du centre de gravité d'un système de corps pour chacun desquels ce centre est connu.*

136. Lorsqu'un corps ou système peut être considéré comme composé de parties dont on connaît individuellement les centres de gravité et les points respectifs, on en déduit immédiatement le centre de gravité du corps ou système. Car ce centre n'est évidemment autre chose que le centre des forces parallèles et de même sens, égales aux poids des corps et appliquées aux centres de gravité respectifs. On pourra donc le déterminer, soit par la composition successive des forces (42), soit par la théorie des moments (99).

Il résulte de la construction indiquée au n° 42 (fig. 20), que si les centres de gravité de tous les corps particuliers

que l'on considère sont, 1° dans un même plan; 2° sur une même droite, le centre de gravité de tout le système sera pareillement, 1° dans le même plan; 2° sur la même droite. Les mêmes conséquences peuvent aussi se conclure de la théorie des moments.

D'abord si l'on représente par P′, P″,... les poids des différents corps du système, et par X, x', x'',... les distances des centres de gravité du système et des corps à un plan, on aura (99):

$$X = \frac{P'x' + P''x'' + \dots}{P' + P'' + \dots},$$

et comme les masses sont proportionnelles aux poids, si l'on désigne par M′, M″,... celles des corps dont les poids sont P′, P″,... la formule ci-dessus deviendra

$$X = \frac{M'x' + M''x'' + \dots}{M' + M'' + \dots}.$$

En calculant les distances X, Y, Z, du centre de gravité à trois plans, qu'on peut supposer, pour plus de simplicité, rectangulaires entre eux, la position de ce point dans l'espace sera complétement déterminée.

L'expression $M'x'$, qui s'énonce le *moment de la masse* M′, n'est autre chose que le produit de cette masse par la distance de son centre de gravité au plan que l'on considère.

On voit par les équations de la dernière forme, que la position du centre de gravité est indépendante de l'action de la pesanteur, comme on l'a déjà reconnu (133).

137. Lorsque les masses du système, supposées au nombre de n, sont égales, on a

$$X = \frac{x' + x'' + \dots}{n}.$$

Donc *dans un système de corps de même masse, la distance du centre de gravité d'un plan quelconque est égale à la moyenne distance des centres de gravité de tous ces corps à ce plan.*

138. Dans le cas particulier où le plan par rapport auquel on prend les moments passe par le centre de gravité d'un système de corps quelconques, on a $X=0$, et par conséquent

$$M'x'+M''x''+\ldots=0.$$

Donc *la somme des moments des masses, par rapport à un plan passant par le centre de gravité du système, est toujours nulle*, ou en d'autres termes, *la somme des moments des masses situées d'un même côté du plan est égale à la somme des moments des masses situées de l'autre côté.*

Réciproquement, si l'on a $M'x'+M''x''+\ldots=0$, on en conclut $X=0$.

Donc *lorsque la somme des moments des masses, par rapport à un plan, est nulle, le centre de gravité du système est dans ce plan.*

Il est facile de tirer de là les mêmes conséquences qu'au n° 136, pour les deux cas particuliers où les centres de gravité des corps sont, 1° dans un même plan, 2° sur une même droite.

139. Lorsque les centres de gravité de tous les corps sont dans un même plan, comme celui du système doit être aussi dans ce plan, si l'on prend les deux autres plans coordonnés perpendiculaires au premier, il est clair que les distances des divers centres de gravité à ces deux plans seront les mêmes que leurs distances aux traces de ces plans sur le premier.

Donc si dans le plan des centres de gravité, l'on mène deux axes non parallèles, et que d'ailleurs, pour chacun

d'eux, on ait soin de regarder comme positifs tous les moments des masses situées d'un même côté de l'axe, puis comme négatifs ceux des masses situées de l'autre côté, on conclut de ce qui précède que

Les distances respectives du centre de gravité du système aux deux axes, sont égales aux deux sommes respectives des moments de toutes les masses, par rapport aux mêmes axes, divisées par la somme des masses.

Menant aux distances trouvées, et du côté indiqué par leur signe, deux parallèles aux axes, leur intersection donnera le centre de gravité.

140. Enfin, lorsque les centres de tous les corps sont sur une même ligne droite, comme celui du système doit être aussi sur cette droite, il ne restera qu'à déterminer sa distance à un plan, qu'on prendra, pour plus de facilité, perpendiculaire à la droite. Alors les distances des centres de gravité des corps au plan seront les mêmes que leurs distances au point d'intersection de la droite et du plan.

Donc *si plusieurs corps ont leurs centres de gravité sur une même droite, la distance du centre de gravité du système à un point pris arbitrairement sur cette droite, est égale à la somme des moments des masses, par rapport à ce point, divisée par la somme des masses.*

Si donc on a soin de regarder comme positifs les moments des masses situées d'un même côté du point, et comme négatifs ceux des masses situées de l'autre côté, en prenant à partir de ce point, et du côté indiqué par le signe, une longueur égale à la distance trouvée, on aura la position du centre de gravité.

141. Lorsque le corps ou système n'est pas susceptible de se décomposer en parties dont on connaisse les centres de gravité, on ne peut, en général, déterminer le centre de gravité du corps qu'à l'aide du calcul intégral.

Toutefois on peut obtenir assez simplement ceux de la plupart des corps dont on s'occupe en Géométrie, comme nous allons le faire voir.

Nous supposerons, pour plus de simplicité, les corps homogènes ou uniformément denses dans toutes leurs parties. Dans ce cas, les poids P', P'',...des corps d'un système, deviennent proportionnels aux volumes V',V'',...de ces corps, et les équations ci-dessus prennent la forme

$$X = \frac{V'x' + V''x'' + \ldots}{V' + V'' + \ldots}.$$

On ne détermine ordinairement les centres de gravité des lignes, surfaces et volumes considérés en Géométrie, qu'en les supposant homogènes et doués d'une pesanteur uniforme en tous leurs points. Ainsi dans la détermination du centre de gravité de l'aire d'un triangle, il faudra sous-entendre que les points de ce triangle sont sollicités par des forces égales, parallèles et de même sens; alors le centre de gravité du triangle sera le centre de ces forces parallèles, ou bien le point d'application de leur résultante.

On voit que la position du centre de gravité ne dépendra plus que de la figure, de sorte que la recherche des centres de gravité rentrera dans les problèmes de Géométrie.

§ 3. — *Des centres de gravité des figures.*

142. Théorème. *Toute figure symétrique, par rapport à un point, ou ayant un point tel qu'un plan quelconque mené par ce point la coupe en deux parties symétriques, a son centre de gravité en ce point, qui est le centre de figure.*

Car tout plan mené par le centre de la figure, la

coupant en deux parties symétriques, doit évidemment contenir le centre de gravité, puisque ce centre est un point unique ne dépendant que de la figure, et que, par conséquent, il n'y a pas de raison pour qu'il se trouve d'un côté du plan plutôt que de l'autre côté. Le centre de gravité devant ainsi se trouver dans tous les plans qu'on peut mener par le centre de figure, sera donc à leur intersection, qui n'est autre que ce dernier point.

143. Corollaire. On peut immédiatement conclure de là que

1° Le centre de gravité d'une ligne droite est au point milieu de cette droite;

2° Le centre de gravité du périmètre ou de l'aire d'un parallélogramme est à l'intersection de ses deux diagonales, ou au point milieu de l'une d'elles;

3° Le centre de gravité de la surface ou du volume d'un parallélépipède est à l'intersection de ses quatre diagonales, ou au point milieu de l'une d'elles;

4° Le centre de gravité de la circonférence ou de l'aire d'un cercle est à son centre;

5° Le centre de gravité de la surface ou du volume d'une sphère est à son centre;

6° Le centre de gravité de la surface ou du volume d'un cylindre à bases parallèles est au point milieu de son axe.

144. Problème I. *Déterminer le centre de gravité, 1° du périmètre d'un triangle, 2° du périmètre d'un polygone quelconque, et, en général, d'un assemblage de lignes droites disposées comme on voudra dans l'espace.*

Fig. 44. 1° Soit le triangle ABC dont les trois côtés AB, AC, BC, ont pour milieux les points p, p', p''. Les poids des côtés AB, AC, BC, seront des forces verticales P, P′, P″, proportionnelles à leurs longueurs, et appliquées aux points p, p', p''. La solution du problème se réduit à dé-

terminer le centre des trois forces parallèles P, P′, P″. Or si l'on divise la droite pp' en deux parties pD, Dp', réciproquement proportionnelles aux longueurs AB, AC, et qu'après avoir mené la droite Dp'', on la divise en deux parties DO, Op'', réciproquement proportionnelles aux longueurs (AB + BC) et BC, le point O sera le centre de gravité du périmètre ABC.

Maintenant, comme les côtés du triangle ABC sont doubles des côtés du triangle $pp'p''$, il est clair que la proportion

$$pD : Dp' :: AC : AD$$

devient $$pD : Dp' :: pp'' : p'p''.$$

Donc la droite Dp'' divise l'angle $pp''p'$ en deux parties égales. De même les droites pO, p'O divisent chacun des angles p, p', en deux parties égales. Donc,

Le centre de gravité du périmètre d'un triangle est le centre du cercle inscrit dans le triangle formé par les droites qui joignent les milieux des côtés du triangle donné.

2° Pour déterminer le centre de gravité du périmètre d'un polygone ou d'un assemblage quelconque de droites, on regardera chaque droite comme concentrée en son centre de gravité, qui est au milieu de sa longueur; on n'aura donc plus à considérer qu'un système de forces verticales, proportionnelles aux longueurs des droites, et appliquées en leurs points milieux. Par conséquent, on déterminera le centre de gravité du système, soit par la composition successive de ces forces parallèles (42), soit par la théorie des moments (139).

145. Problème II. *Déterminer le centre de gravité 1° de l'aire d'un triangle, 2° de l'aire d'un polygone, et, en général, d'un assemblage de figures planes et rectilignes disposées comme on voudra dans l'espace?*

1° Soit ABC le triangle proposé. Si l'on conçoit la Fig. 45.

surface comme composée d'une infinité de tranches très-minces parallèles à la base AB, il est clair que la droite BD, menée du sommet B au milieu D de la base, divisera toutes ces tranches en deux parties égales. Par conséquent, leurs centres de gravité seront sur la droite CD, qui contiendra donc celui de leur système ou du triangle ABC. Par la même raison, le centre de gravité du triangle doit se trouver sur la droite AE menée du sommet A au milieu E du côté opposé BC; il sera donc à l'intersection G des droites BD, AE.

La droite CF, menée du troisième sommet C au milieu du côté opposé AB, passe aussi par le point G, qui est en même temps le centre de figure du triangle.

Maintenant si l'on mène la droite DE, elle sera parallèle à AB et égale à $\frac{1}{2}$ AB, puisque les points D, E, sont les milieux des côtés AC, BC. Donc les triangles semblables DGE, AGB donneront

$$DG : BG :: DE : AB :: 1 : 2,$$

d'où il résulte que DG est la moitié de BG, et, par conséquent, le tiers de BD. Donc,

Le centre de gravité de l'aire d'un triangle est sur la ligne menée d'un sommet quelconque au milieu du côté opposé, pris pour base, et se trouve au tiers de cette ligne à partir de la base, ou aux deux tiers à partir du sommet.

2° Tout polygone pouvant se décomposer en triangles par des diagonales, si l'on détermine les centres de gravité de tous les triangles du système, les poids de ces triangles seront des forces verticales P, P', P''..., proportionnelles à leurs surfaces, et appliquées à leurs centres de gravité. Il ne restera donc plus qu'à déterminer le centre des forces parallèles P, P', P'',..., soit

par la composition successive de ces forces, soit par la théorie des moments.

146. REMARQUE. Comme la démonstration précédente (144, 1°) peut paraître ne pas avoir toute la rigueur possible, nous ajoutons la suivante, qui ne laisse rien à désirer sous ce rapport, et qui est basée sur la théorie des moments.

Soit le triangle ABC; si par le milieu D de la base BC, on mène aux côtés AB, AC, les parallèles DE, DF, qui les rencontrent en E et en F, le triangle sera décomposé en un parallélogramme AEDF, et en deux triangles BDF, DEC, égaux entre eux, et semblables au triangle ABC. Par conséquent (136) le moment du triangle proposé, par rapport à une droite tracée dans son plan, égalera la somme des moments du parallélogramme et des deux triangles partiels. Fig. 47.

Or, si l'on représente par S la surface du triangle ABC, par h sa hauteur, et par x la distance de son centre de gravité à la base BC, on aura

$$\text{surface ABC}' = \text{S}, \quad \text{surface AEDF} = \frac{\text{S}}{2},$$

$$\text{surface DEC} = \text{surface BFD} = \frac{\text{S}}{4}.$$

Donc si l'on prend ces moments par rapport à la base BC,

1° Le moment du triangle ABC sera $\text{S}.x$.

2° Le moment du parallélogramme AEDF sera $\frac{\text{S}}{2} . \frac{h}{2}$; car son centre de gravité, se trouvant au milieu de la diagonale FE (143), est donc à une distance $\frac{h}{2}$ de BC.

3° Le moment de chacun des triangles partiels DEC,

BFD, sera $\frac{S}{4} . x'$, en désignant par x' la distance commune de leurs centres de gravité à la base BC.

Ainsi l'on aura

$$S.x = \frac{S}{2}.\frac{h}{2} + \frac{S}{4}.x' + \frac{S}{4}.x',$$

d'où

$$x = \frac{h}{4} + \frac{x'}{2}.$$

Concevons maintenant qu'on fasse dans le triangle DEC, la même construction que dans le triangle BAC. Alors le triangle DEC sera décomposé en un parallélogramme et en deux triangles partiels; de sorte qu'en nommant x'' la distance analogue à x', et observant que la hauteur des nouveaux triangles partiels est $\frac{h}{4}$ ou la moitié de la hauteur du triangle DEC, on aura comme ci-dessus

$$x' = \frac{h}{8} + \frac{x''}{2}.$$

En continuant la même construction, on aura de même

$$x'' = \frac{h}{16} + \frac{x'''}{2},$$

$$x''' = \frac{h}{32} + \frac{x^{\text{IV}}}{2},$$

x''', x^{IV},... désignant, pour les triangles partiels successifs, les distances de leur centre de gravité à la base BC, distances qui vont sans cesse en diminuant, et sont toujours plus petites que les hauteurs des triangles relatifs, de sorte que la dernière x_m peut être rendue plus petite que toute quantité donnée.

Si donc on met successivement dans la première équation, à x', x'', x''',...x_m leurs valeurs tirées des équations suivantes, on aura

$$x = \frac{h}{4} + \frac{h}{4^2} + \frac{h}{4^3} + \ldots + \frac{h}{4^m},$$

dont le dernier terme peut être rendu plus petit que toute quantité donnée, en prenant m suffisamment grand. On a donc rigoureusement (*)

$$x = \frac{h}{3}.$$

On prouvera de même, en prenant AB pour base du triangle ABC, que la distance de son centre de gravité à a base AB se trouve au tiers de la hauteur h' en partant de la base. Donc ce centre est au point d'intersection G des deux parallèles EF, HL, menées aux côtés BC, AB, aux distances $\frac{h}{3}, \frac{h'}{3}$. Or, d'après la construction, on a Fig. 47

$$\text{CF} = \frac{\text{AC}}{3}, \quad \text{et} \quad \text{AL} = \frac{\text{CA}}{3};$$

donc les points F, L, partagent CA en trois parties égales. Or de AL $=$ LF, on conclut EG $=$ GF, et par suite BD $=$ DC. Donc enfin le centre de gravité G du triangle ABC se trouve sur la droite AD, menée du sommet A au milieu de la base BC, et à une distance de cette base, égale au tiers de la hauteur du triangle.

147. Corollaire I. *La distance du centre de gravité d'un triangle, à un plan situé d'une manière quelconque dans l'espace, est égale à la moyenne distance de ses trois sommets au même plan.*

(*) Nous avons fait voir dans notre Algèbre (n° 236, 3°) qu'une progression décroissante et prolongée à l'infini, dont le premier terme est a et dont la raison est q, a pour somme de tous ses termes l'expression $\frac{a}{1-q}$.

Car si l'on conçoit trois masses égales dont les centres
Fig. 47. de gravité soient aux trois sommets d'un triangle ABC, la distance du centre de gravité du système à un plan quelconque égalera (137) la moyenne distance des centres de gravité des trois masses à ce plan. Or on trouve le centre de gravité du système, en prenant d'abord, par exemple, celui des deux masses B, C, qui est au milieu D de BC, et divisant AD au point G, en deux parties réciproquement proportionnelles aux nombres 2 et 1. Comme la même construction donne aussi (144, 1°) le centre de gravité du triangle ABC, on en conclut l'énoncé du corollaire.

148. Problème III. *Déterminer le centre de gravité d'un trapèze?*

La détermination du centre de gravité d'un trapèze serait peut-être mieux placée comme *corollaire* ou *remarque* du n° 144; mais nous avons préféré l'exposer à part, pour mieux séparer les articles.

Fig. 48. Soit le trapèze ABCD. Si l'on prolonge les deux côtés non parallèles jusqu'à leur rencontre en E, on aura deux triangles semblables EBC, EAD. La droite EG menée du sommet commun A, au milieu G de la base AD, passant aussi par le milieu F de la base BC, contiendra donc les centres de gravité des deux triangles, et par suite (136) celui du trapèze ABCD formé par leur différence. On obtiendra donc le centre de gravité du trapèze, en déterminant, soit sa distance x à la base AD, soit sa distance y à la base BC, ou bien, ce qui est plus simple ici, le rapport de x à y.

Or, si l'on désigne par H, h, les hauteurs des triangles AED, BEC, et par H^2 la surface ou le poids du triangle AED, h^2 sera le poids du triangle BEC, et $(H^2 - h^2)$ celui du trapèze ABCD. Prenant les moments

de ces poids par rapport à la base AD, on a $H^2 . \frac{H}{3}$ pour celui de H^2, $h^2\left(\frac{h}{3}+H-h\right)$ pour celui de h^2, et $x(H-h)$ pour celui de H^2-h^2. Le premier moment devant égaler la somme des autres, on a donc

$$H^2.\frac{H}{3}=h^2\left(\frac{h}{3}+H-h\right)+(H-h)x,$$

d'où l'on tire $3(H^2-h^2)x=H^3-3h^2H+2h^3$.

On trouverait de la même manière une équation en y; mais on l'obtient plus simplement en observant qu'on a $y=(H-h)-x$, d'où $x=H-h-y$. Substituant à x cette valeur dans l'équation précédente, il vient, après la réduction,

$$3(H^2-h^2)y=h^3-3H^2h+2H^3.$$

Divisant les deux équations, membre à membre, on a

$$\frac{x}{y}=\frac{H^3-3h^2H+2h^3}{h^3-3H^2h+2H^3}=\frac{(H-h)^2\,(H+2\,h)}{(H-h)^2\,(h+2H)}=\frac{H+2h}{h+2H},$$

d'où $$x:y::H+2h:h+2H;$$

et enfin, en remplaçant les hauteurs H, h, par les bases B, b, qui leur sont proportionnelles,

$$x:y::B+2b:b+2B.$$

Par conséquent,

Le centre de gravité d'un trapèze est sur la droite joignant les points milieux des deux bases, et divise cette droite en deux parties proportionnelles aux deux sommes qu'on obtient en ajoutant 1° la première base à deux fois la seconde, 2° la seconde base à deux fois la première.

D'après cela, si l'on prolonge BC, vers la droite, d'une longueur CH égale à AD, et AD, vers la gauche, d'une longueur AI égale à BC, la droite menée du point H

au point I, coupera FG en un point O, qui sera le centre de gravité du trapèze ABCD.

En effet, les triangles semblables OIG, OFH donnent la proportion

$$\mathrm{OG} : \mathrm{OF} :: \mathrm{IG} : \mathrm{FH} :: \frac{1}{2}\mathrm{B} + b : \frac{1}{2}b + \mathrm{B} :: \mathrm{B} + 2b : b + 2\mathrm{B}.$$

149. Remarque. On peut observer que,

1° La proportion précédente convient à tous les trapèzes qui ont des bases proportionnelles; car elle ne dépend pas de la hauteur du trapèze, mais seulement du rapport des bases.

2° Lorsque les bases sont égales, on a $x = y$. En effet, le trapèze devient alors un parallélogramme.

3° Lorsque l'une des bases b est nulle, on a $x = \frac{y}{2}$, comme cela doit être; car le trapèze devient un triangle dont la base est B.

150. Problème IV. *Déterminer le centre de gravité 1° du volume d'un prisme triangulaire, 2° du volume d'un prisme quelconque?*

Fig. 49. 1° Soit le prisme triangulaire ABCDEF. Si l'on mène, à égale distance des bases ABC, DEF, un plan HIL, qui leur soit parallèle, ce plan partagera chacune des arêtes latérales AD, BE, CF, en deux parties égales aux points H, I, L, et coupera le prisme suivant un triangle HIL, dont les côtés seront égaux et parallèles aux côtés des bases. Or, il est facile de faire voir que le centre de gravité du prisme n'est autre que le centre de gravité du triangle HIL.

En effet, concevons le prisme comme composé d'une infinité de tranches très-minces, telles que *adfc*, parallèles à l'une des faces latérales ADFC. Le plan HIL coupera toutes ces tranches suivant des droites, telles que *hl*, parallèles à HL, et la droite IM, menée du point I au

milieu M de HL, passera de même par le milieu G de toute droite telle que *hl*. Or (143) les points M, G sont les centres de gravité des parallélogrammes ADFC, *adfc*; donc la droite IM contient les centres de gravité de toutes les tranches parallèles à la face ADFC, et, par conséquent, celui de leur système ou du prisme AF. Par la même raison, le centre de gravité du prisme doit se trouver sur la droite LN menée du point L au milieu N de HI. Il sera donc au point d'intersection G des droites IM, LN, qui est (141) le centre de gravité de la section HIL. Donc, *le centre de gravité d'un prisme triangulaire se trouve au centre de gravité de la section faite dans le prisme parallèlement aux bases, à égale distance de chacune d'elles.*

De plus, si l'on mène par le point G une parallèle G′G″ aux arêtes latérales du prisme, il est clair que les points G′, G″, où elle rencontrera les bases ABC, DEF, seront situés dans ces triangles, absolument de la même manière que le point G dans le triangle HIL; donc les points G′, G″ seront les centres de gravité des bases du prisme.

Donc aussi, *le centre de gravité d'un prisme triangulaire est au milieu de la droite qui joint les centres de gravité des deux bases.*

2° Comme un prisme quelconque peut se décomposer en prismes triangulaires, si l'on détermine, comme ci-dessus, le centre de gravité de tous les prismes partiels, les poids de ces prismes seront des forces verticales proportionnelles à leurs volumes, et appliquées à leurs centres de gravité. Déterminant alors le centre de ces forces parallèles par leur composition successive, on trouvera facilement le résultat suivant :

Le centre de gravité d'un prisme quelconque est le même que celui de la section faite dans le prisme paral-

tèlement aux bases, à égale distance de chacune d'elles.

Ou bien encore : *Le centre de gravité d'un prisme quelconque est au milieu de la droite qui joint les centres de gravité des deux bases opposées.*

151. REMARQUE. On peut appliquer au prisme triangulaire une démonstration tout à fait analogue à celle qu'on a donnée plus haut (146) pour le triangle. Car la théorie des moments fournit le moyen de déterminer très-simplement la distance du centre de gravité du prisme à chacune de ses faces latérales et de ses bases.

Fig. 50. Pour trouver, par exemple, la distance x du centre de gravité du prisme ABCDEF, à la face ABED, menons par le milieu a de AB, deux plans $adfc$, $adeb$, respectivement parallèles aux faces ADFC, BEFC. Le prisme donné sera décomposé en un parallélipipède aF, équivalent à la moitié du prisme, et en deux prismes triangulaires AbaDed, acBdfE, égaux entre eux. Le moment du prisme, par rapport à un plan quelconque, égalera donc la somme des moments du parallélipipède et des deux prismes partiels. Or, si l'on représente par V le volume du prisme donné, et par h la distance de l'arête CF à la face parallèle ABED, on aura

$$\text{vol. ABCDEF} = \text{V}, \quad \text{vol. } a\text{F} = \frac{\text{V}}{2},$$

$$\text{vol. A}ba\text{D}ed = \text{vol. } ac\text{B}df\text{E} = \frac{\text{V}}{4}.$$

Donc, en prenant les moments par rapport à la face ABED,

1° Le moment du prisme donné sera Vx;

2° Le moment du parallélipipède sera $\frac{\text{V}}{2}\cdot\frac{h}{2}$; car son centre de gravité, se trouvant au milieu de la diagonale aF (143), est donc à une distance $\frac{h}{2}$ de la face ABED;

3° Le moment de chacun des prismes partiels sera $\frac{V}{4} \cdot x'$, en désignant par x' les distances de leurs centres de gravité au plan ABED, distances évidemment égales entre elles.

On aura donc

$$Vx = \frac{Vh}{4} + \frac{Vx'}{4} + \frac{Vx'}{4};$$

d'où

$$x = \frac{h}{4} + \frac{x'}{2},$$

et si l'on applique, mot pour mot, aux prismes triangulaires, tout ce qu'on a dit plus haut (145) pour les triangles, on trouvera

$$x = \frac{h}{3}.$$

Ainsi le centre de gravité du prisme proposé se trouve, relativement à chaque face, au tiers de la distance de cette face à l'arête opposée.

Or, si l'on mène, au tiers de la distance de la face ABED à l'arête CF, un plan parallèle à cette face, le plan coupera la base ABC suivant une droite parallèle à AB, et située à une distance de AB égale au tiers de la hauteur du triangle ABC, prise par rapport à AB; de sorte que cette parallèle contiendra le centre de gravité du triangle ABC. De même, le plan mené parallèlement à la face CBEF, et au tiers de la distance de cette face à l'arête AD, coupera la base ABC, suivant une droite parallèle à BC, et contenant le centre de gravité de cette base. Donc l'intersection des deux plans parallèles aux deux faces, et qui doivent contenir le centre de gravité du prisme, passe par le centre de gravité de la base ABC. On démontrera de même que cette intersection passe par le centre de gravité de la base DEF. Donc le

centre de gravité du prisme se trouve sur la droite ou *axe*, qui joint les centres de gravité des deux bases.

Il reste à faire voir que ce point est au milieu de l'axe. Pour cela, si l'on désigne par H la hauteur commune des prismes et du parallélipipède, par y la distance du centre de gravité du prisme proposé à la base ABC, et par y' la distance du centre de gravité de chaque prisme partiel à la même base, en prenant les moments par rapport au plan ABC, celui du prisme proposé sera Vy, celui du parallélipipède sera $\frac{V}{2}\cdot\frac{H}{2}$, et ceux des prismes partiels seront $\frac{V}{4}\cdot y'$. On aura donc

$$Vy=\frac{VH}{4}+\frac{Vy'}{4}+\frac{Vy'}{4},$$

d'où

$$y=\frac{H}{4}+\frac{y'}{2}.$$

Appliquant encore ici, mot pour mot, tout ce qui a été dit (145) pour les triangles, et observant que les prismes partiels successifs ont tous la même hauteur H, on aura donc

$$y=\frac{H}{4}+\frac{y'}{2},$$
$$y'=\frac{H}{4}+\frac{y''}{2},$$
$$y''=\frac{H}{4}+\frac{y'''}{2},$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

d'où l'on tire, par des substitutions successives,

$$y=\frac{H}{2^2}+\frac{H}{2^3}+\frac{H}{2^4}+\dots$$

On a donc rigoureusement (voyez la note du n° 145)

$$y=\frac{H}{2}.$$

Donc enfin le centre de gravité du prisme est au milieu de son axe.

152. Problème V. *Déterminer le centre de gravité, 1° d'une pyramide triangulaire; 2° d'une pyramide quelconque?*

Concevons la pyramide triangulaire SABC, comme composée d'une infinité de tranches très-minces parallèles à la base ABC. Il est évident que la droite SD, menée du sommet S au centre de gravité D de la base, coupera cette base et toutes les tranches parallèles en des points semblablement placés, et, par conséquent, passera par les centres de gravité de toutes ces tranches. Donc le centre de gravité de leur système, c'est-à-dire de la pyramide, sera sur la droite SD. Fig. 51.

Considérant un autre sommet A comme le sommet de la pyramide, qui alors aura pour base la face opposée SBC, on fera voir, comme tout à l'heure, que le centre de gravité de la pyramide doit aussi se trouver sur la droite AE, menée du sommet A au centre de gravité E de la base; par conséquent, il sera donné par l'intersection des droites SD, AE, qui doivent donc nécessairement se rencontrer.

Il est d'ailleurs facile de faire voir directement que les droites SD, AE, sont situées dans un même plan. Car si l'on mène les droites AD, SE, passant par les centres de gravité D, E, des triangles ABC, SBC, chacune ira rencontrer le côté commun BC, en son milieu F. Donc les droites SA, SE sont dans le plan du triangle ASF, et doivent nécessairement se rencontrer en un point G.

Maintenant si l'on joint DE, comme $EF = \frac{1}{3}$ SF, et $DF = \frac{1}{3}$ AF, il en résulte que la droite DE sera parallèle à SA, dont elle égalera le tiers. Mais les triangles SAG, GDE, étant semblables, si $DE = \frac{1}{3}$ SA, on aura $DG = \frac{1}{3}$ SG ou $= \frac{1}{4}$ de SD, et par suite $SG = \frac{3}{4}$ SD.

Donc, *le centre de gravité d'une pyramide triangulaire est sur la ligne menée, de l'un quelconque des sommets, au centre de gravité de la base opposée, et se trouve au quart de cette ligne, à partir de la base, ou aux trois quarts à partir du sommet.*

Fig. 52. 2° Soit SABCDE une pyramide quelconque. Si l'on divise la base ABCDE en triangles par les diagonales AC, AD, et qu'on mène les plans SAC, SAD, la pyramide sera décomposée en pyramides triangulaires SABC, SACD, SADE, de même hauteur, et, par conséquent, proportionnelles à leurs bases. Or, si au quart de la hauteur commune, on fait, dans la pyramide donnée, une section parallèle à la base, ses intersections avec les plans SAC, SAD, la diviseront en triangles *abc*, *acd*, *ade*, semblables aux triangles correspondants de la base, et dont les centres de gravité seront en même temps, comme on vient de le voir, ceux des pyramides triangulaires respectives. Comme, en outre, les volumes de ces pyramides sont proportionnels aux triangles de la section, il en résulte que la construction, qui détermine le centre de gravité du système de ces pyramides ou de la pyramide totale, détermine également le centre de gravité du système des triangles ou de la section. Donc ces deux centres se confondent en un seul point *g*, et puisque les polygones ABCDE, *abcde*, sont semblables et semblable-

ment placés, il est évident que la droite, menée du sommet S au centre de gravité g de la section, ira passer par le centre de gravité G de la base.

Donc, *le centre de gravité d'une pyramide quelconque est sur la droite menée du sommet au centre de gravité de la base, et se trouve au quart de cette ligne, à partir de la base.*

153. REMARQUE. On peut aussi déterminer le centre de gravité d'une pyramide triangulaire, d'après la théorie des moments, par un procédé tout à fait analogue à ceux des n°s 145 et 150.

En effet, soit la pyramide SABC. Si, par le point b, milieu de SB, on fait passer deux sections, l'une abc, parallèle à la base ABC, l'autre $ba'c'$, parallèle à la face SAC, en menant ad parallèle à bc', et joignant $c'd$, la pyramide sera décomposée en deux prismes triangulaires équivalents, ayant dc'C, $a'bc'$, pour bases, et en deux pyramides triangulaires Sabc, ba'Bc', égales entre elles, et semblables à la pyramide SABC. Soit V le volume de cette pyramide, $\frac{V}{8}$ sera celui de chaque pyramide partielle, et $\frac{3V}{8}$ celui de chaque prisme triangulaire. Fig. 53.

Si donc on désigne par h la hauteur de la pyramide totale, par x la distance de son centre de gravité à la base ABC, et par x' la hauteur du centre de gravité de la pyramide ba'Bc' au-dessus du plan ABC, celle du centre de gravité de la pyramide Sabc, au-dessus du même plan sera $\frac{h}{2}+x'$, de sorte qu'en prenant les moments par rapport au plan ABC,

1° Le moment de la pyramide totale sera Vx;

2° Les moments des pyramides ba'Bc', Sabc, seront

$\frac{Vx'}{8}$, $\frac{V}{8}\left(h+\frac{x'}{2}\right)$, et leur somme sera donc

$$\frac{Vx'}{8}+\frac{V}{8}\left(h+\frac{x'}{2}\right);$$

3° Les moments des prismes, dont les bases sont $dc'C$, $a'bc'$, seront $\frac{3V}{8}\cdot\frac{1}{2}\frac{h}{2}$, $\frac{3V}{8}\cdot\frac{1}{3}\frac{h}{2}$; car la hauteur du premier est $\frac{1}{2}$ de $\frac{h}{2}$, et celle du second est $\frac{1}{3}$ de $\frac{h}{2}$; leur somme sera donc $\frac{3V}{8}\cdot\frac{h}{4}+\frac{3V}{8}\cdot\frac{h}{6}$.

On aura donc (146)

$$Vx=\frac{3V}{8}\cdot\frac{h}{4}+\frac{3V}{8}\cdot\frac{h}{6}+\frac{Vx'}{8}+\frac{V}{8}\left(h+\frac{x'}{2}\right),$$

d'où l'on tire, en réduisant et divisant par V,

$$x=\frac{7}{32}h+\frac{x'}{4}.$$

Concevons maintenant qu'on fasse dans la pyramide $bd'Bc'$, la même construction que dans la pyramide SABC; comme la hauteur de la pyramide décomposée est $\frac{h}{2}$, en nommant x'' la distance analogue à celle qu'on a désignée par x', on aura, comme tout à l'heure,

$$x'=\frac{7}{32}\cdot\frac{h}{2}+\frac{x''}{4};$$

de sorte qu'en continuant indéfiniment la même construction, on aura la suite d'équations

$$x=\frac{7}{32}\cdot\frac{h}{2}+\frac{x'}{4},$$
$$x'=\frac{7}{32}\cdot\frac{h}{2}+\frac{x''}{4},$$
$$x''=\frac{7}{32}\cdot\frac{h}{4}+\frac{x'''}{4},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

or, les distances x', x'', x''', des centres de gravité des pyramides partielles au plan ABC, étant toujours moindres que les hauteurs des pyramides relatives, vont sans cesse en diminuant, et la dernière x_m peut être rendue plus petite que toute quantité donnée. Donc si l'on substitue dans la première équation à x', x'',... les valeurs tirées des équations subséquentes, ce qui donne

$$x = \frac{7}{32} \cdot h\left(1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8^2} \ldots + \frac{1}{8^m}\right),$$

on en conclura rigoureusement (146)

$$x = \frac{1}{4} h.$$

Comme on obtient le même résultat en prenant l'une quelconque des autres faces pour base, il en résulte que le centre de gravité de la pyramide est au-dessus de chacune des quatre faces, à une distance égale au quart de la hauteur du sommet opposé.

De là on peut aisément conclure qu'il est situé au point déterminé comme précédemment (152, 1°).

154. COROLLAIRE. *La distance du centre de gravité d'une pyramide triangulaire, à un plan situé d'une manière quelconque dans l'espace, est égale à la moyenne distance de ses quatre sommets au plan.*

Car si l'on conçoit quatre masses égales qui aient leurs centres de gravité aux quatre sommets de la pyramide, la distance du centre de gravité du système à un plan quelconque égalera (137) la moyenne distance des centres de gravité des quatre masses à ce plan. Or, on obtient le centre de gravité du système en déterminant d'abord le centre de gravité de trois quelconques des masses, qui est (147) le centre de gravité de la face même aux sommets de laquelle les masses sont situées.

Divisant alors, dans le rapport de 3 à 1, la droite joignant ce centre de gravité à celui de la quatrième masse, on obtient le centre de gravité du système. Or, celui de la pyramide se déterminant (152) par la même construction, on en conclut l'énoncé du corollaire.

155. Remarque. Le cône pouvant être considéré comme une pyramide, dont la base est un polygone d'une infinité de côtés, on voit que

Le centre de gravité d'un cône à base quelconque est situé sur la ligne menée du sommet au centre de gravité de la base, et au quart de cette ligne en partant de la base.

156. Problème VI. *Déterminer le centre de gravité d'un tronc de pyramide?*

Concevons une pyramide P dont on ait retranché une pyramide semblable, par une section parallèle à la base, pour former le tronc en question. Le sommet commun des deux pyramides et les centres de gravité de leurs bases seront sur une même droite, qui contiendra donc aussi le centre de gravité du tronc. Il s'agit de déterminer, soit sa distance x à la base inférieure, soit sa distance y à la base supérieure, ou bien, ce qui est plus simple ici, comme au n° 148, le rapport de x à y.

Or, si l'on désigne par H, h, les hauteurs des pyramides P, p, et par H^3 le volume ou le poids de la grande, h^3 sera le poids de la petite, et $H^3 - h^3$ celui du tronc. Les moments de ces poids, par rapport à la base inférieure, seront respectivement

$$H^3 . \frac{H}{4}, \quad h^3\left(\frac{h}{4} + H - h\right), \quad x(H^3 - h^3).$$

On aura donc

$$H^3 . \frac{H}{4} = h^3\left(\frac{h}{4} + H - h\right) + x(H^3 - h^3),$$

ou bien

$$4(H^3 - h^3)x = H^4 - 4h^3 H + 3h^4.$$

On trouverait de la même manière une équation en y, mais on l'obtient plus simplement, en observant qu'on a $y = (H - h) - x$, d'où $x = H - h - y$. Substituant à x cette valeur dans l'équation précédente, il vient $4(H^3 - h^3)(H - h - y) = H^4 - 4h^3 H + 3h^4$,

$$\text{ou } 4(H^3 - h^3)y = h^4 - 4H^3 h + 3H^4.$$

Divisant, membre à membre, les deux équations en x et en y, il vient

$$\frac{x}{y} = \frac{H^4 - 4h^3 H + 3h^4}{h^4 - 4H^3 h + 3H^4},$$

d'où l'on tire, en supprimant le facteur commun $(H - h)^2$,

$$x : y :: H^2 + 2Hh + 3h^2 : h^2 + 2hH + 3H^2.$$

Mais les pyramides P, p, étant semblables, on peut remplacer les carrés des hauteurs H^2, h^2, par les bases B, b, qui leur sont proportionnelles, et, par suite, Hh par une base $\sqrt{Bb}$, moyenne proportionnelle entre B et b; on aura donc enfin

$$x : y :: B + 2\sqrt{Bb} + 3b : b + 2\sqrt{Bb} + 3B,$$

ce qu'on peut énoncer ainsi :

Le centre de gravité d'un tronc de pyramide est sur la droite joignant les centres de gravité des deux bases, et divise cette droite en deux parties proportionnelles aux deux sommes, l'une formée par la base inférieure, trois fois la base supérieure et deux fois une moyenne proportionnelle entre ces deux bases, l'autre formée par la base supérieure, trois fois la base inférieure, et deux fois la même moyenne proportionnelle.

157. REMARQUE. On peut observer que

1° La proportion précédente s'applique à tous les troncs

de pyramide qui ont des bases proportionnelles; car elle ne dépend pas de la hauteur du tronc, mais seulement du rapport des bases.

Elle s'applique également au tronc de cône, dont les bases peuvent être considérées comme des polygones d'une infinité de côtés.

2° Lorsque les bases sont égales, on a $x=y$. En effet, le tronc de pyramide devient alors un parallélipipède.

3° Lorsque l'une des bases b est nulle, on a $x=\frac{y}{3}$, comme cela doit être; car alors le tronc devient une pyramide dont la base est B.

158. PROBLÈME VII. *Déterminer le centre de gravité d'un polyèdre, et, en général, d'un assemblage de polyèdres disposés comme on voudra dans l'espace?*

Tout polyèdre pouvant se décomposer en pyramides, au moyen de plans menés suivant les diagonales, si l'on détermine les centres de gravité de toutes les pyramides dont se compose le système proposé, les poids de ces pyramides seront des forces verticales P, P′, P″,... proportionnelles à leurs volumes, et appliquées à leurs centres de gravité. Cherchant alors le centre des forces parallèles P, P′, P″,... soit par la composition successive de ces forces, soit par la théorie des moments, on aura le centre de gravité du polyèdre.

159. REMARQUE GÉNÉRALE. Lorsqu'on veut déterminer le centre de gravité d'un polygone ou d'un polyèdre, par la composition successive de deux forces parallèles en une seule, le procédé général de construction peut se simplifier comme il suit :

Fig. 54. I. *Polygones.* — Soit d'abord un quadrilatère ABCD. On le divise par la diagonale AC en deux triangles ABC, ADC, dont on détermine les centres de gravité g, g'. On mène la droite gg', qui coupe AC au point F, et

l'on prend sur gg', à partir du point g', une longueur $g'G = gF$. Le point G sera le centre de gravité du quadrilatère ABCD.

Car, par suite de la construction (145, 1°), gg' étant parallèle à la diagonale BD qui coupe AC au point O, on a

$$BO:GO::gF:Fg'::g'G:gG.$$

Or, les triangles ABC, ADC, ayant une base commune, donnent

$$\text{tri.ABC}:\text{tri.ADC}::BO:OD.$$

Et l'on a, par suite, $g'G:gG::$ *tri.* ABC : *tri.* ADC.

Donc le centre de gravité du quadrilatère est au point G, centre des deux forces parallèles qui représentent les deux triangles.

Soit encore le pentagone ABCDE. Si on le divise par la diagonale AD, en un quadrilatère ABCD, et en un triangle ADE, dont les centres de gravité, déterminés comme ci-dessus, sont g et g', il est clair que le centre de gravité du pentagone sera sur la droite gg'. Par la même raison, il devra se trouver sur la droite $\gamma\gamma'$, joignant les centres de gravité du quadrilatère AEDC, et du triangle ABC, qu'on obtient en menant une autre diagonale AC du pentagone. Donc le centre de gravité sera au point d'intersection G de ces deux droites. Fig. 55.

Il est facile d'étendre, de proche en proche, le même procédé à un polygone d'un nombre quelconque de côtés, dont le centre de gravité sera toujours déterminé par l'intersection de deux droites.

II. *Polyèdres*. Les mêmes considérations s'appliquent à la détermination du centre de gravité d'un polyèdre.

Soit d'abord le polyèdre ABCDE, composé seulement de deux pyramides P, P', qu'on obtient en menant le plan BDE. On détermine leurs centres de gravité g, g', et après avoir mené la droite gg', qui coupe le plan BDE Fig. 56.

au point F, on prend sur cette droite une longueur $g'G = gF$. Le point G sera le centre de gravité du polyèdre.

Car, par suite de la construction, la droite gg' étant parallèle à la diagonale AC, qui rencontre le plan BDE au point H, on a

$$AH : HC :: gF : Fg' :: Gg' : gG.$$

Or, les pyramides P, P', ayant une base commune BDE, donnent

$$P : P' :: AH : HC,$$

et l'on a, par suite, $g'G : gG :: P : P'$.

Donc le centre de gravité du polyèdre est au point G.

Soit encore un polyèdre formé de trois pyramides consécutives P, P', P''. Déterminant comme tout à l'heure les centres de gravité g, g', de $P + P'$, et de P'', la droite gg' contiendra le centre de gravité G du polyèdre. Or, le même centre G, devant aussi se trouver sur la droite $\gamma\gamma'$, joignant les centres de gravité de $P' + P''$ et de P, sera donc à leur intersection.

Il est facile d'étendre, de proche en proche, le même procédé à un polyèdre d'un nombre quelconque de faces, dont le centre de gravité sera toujours déterminé par l'intersection de deux droites.

CHAPITRE V.

DES MACHINES.

160. On donne ordinairement le nom de *machines* à tout instrument propre à transmettre l'action des forces. Mais, d'après cette définition, tous les corps possibles seraient machines, puisqu'ils sont tous capables de transmettre l'action des forces qui les sollicitent. Or, il est facile de parvenir à une définition plus précise, au moyen des considérations suivantes.

Nous avons vu, dans le second chapitre, que des forces quelconques, appliquées à un corps entièrement libre, ne peuvent se faire équilibre, que lorsqu'elles satisfont à certaines conditions déterminées. Mais comme à l'aide des machines proprement dites, il est toujours possible de mettre en équilibre des forces qui ne remplissent pas ces conditions, il en résulte évidemment qu'*une machine est un corps ou système non parfaitement libre, mais gêné dans ses mouvements par certains obstacles.*

D'après cela, pour que des forces quelconques se fassent équilibre sur une machine, il n'est plus nécessaire que leurs résultantes soient nulles d'elles-mêmes; il faut simplement que leurs directions passent par les points où les obstacles exercent leur résistance. La théorie de l'équilibre des machines permet donc de remplacer les obstacles par leurs résistances actuelles, c'est-à-dire, par

des forces égales et contraires à celles qu'ils détruisent actuellement. Dès lors l'équilibre a lieu, non plus entre les seules forces appliquées, mais entre ces forces et les résistances ; et, par conséquent, les conditions de l'équilibre des machines deviennent identiquement les mêmes que celles des corps entièrement libres.

On est dans l'usage de distinguer les *machines simples* et les *machines composées*. Les premières consistent en un seul corps solide, gêné dans ses mouvements par un obstacle quelconque. Les autres sont un assemblage de machines simples réagissant les unes sur les autres, en vertu de leur liaison mutuelle.

161. Il y a trois principales machines simples, auxquelles on peut ramener toutes les autres, et qui sont le *levier*, le *tour*, le *plan incliné*.

Dans la première machine, l'obstacle est *un point fixe*, autour duquel le corps peut tourner en tout sens.

Dans la seconde, l'obstacle est *une droite fixe* autour de laquelle le corps ne peut prendre qu'un mouvement de rotation.

Dans la troisième, l'obstacle est *un plan fixe* où le corps s'appuie, et sur lequel il peut seulement glisser.

Nous allons traiter, sous le point de vue des conditions d'équilibre, ces trois machines, et les plus usitées de celles qui s'y rattachent. Nous considérerons aussi quelques machines composées ; mais chacune sera traitée immédiatement après la machine simple dont elle est formée, ce qui rendra les analogies plus faciles à saisir que si l'on exposait toutes les machines composées après les machines simples.

Dans tout ce qui va suivre, nous ferons abstraction du frottement des corps les uns sur les autres, de la roideur des cordes, et des autres circonstances physiques. Enfin, nous comprendrons généralement, sous le nom

de *résistances*, les forces qu'il faut détruire, et nous donnerons le nom de *puissances* aux forces qui doivent faire équilibre aux résistances.

Du levier.

162. Tout le monde connaît le *levier*, ou espèce de bâton qu'on emploie pour soulever les fardeaux, en engageant une extrémité sous le fardeau, et faisant effort à l'autre extrémité.

Dans l'acception la plus générale, le levier est un corps solide de forme quelconque AB, assujetti à tourner autour d'un point fixe F, qui est le *point d'appui*. Fig. 57.
Ordinairement le levier n'est sollicité que par deux forces P, Q, appliquées immédiatement, ou suivant des cordons, en deux points A et B. Celle des deux forces, P par exemple, qui tend à donner le mouvement à la machine, est la *puissance;* l'autre force Q, ou l'effort qu'il faut vaincre, est la *résistance.*

Pour qu'il y ait équilibre entre ces deux forces, il faut et il suffit (112) qu'elles aient une résultante dirigée vers le point d'appui, ce qui entraîne les deux conditions suivantes : 1° que les forces aient une résultante, et, par conséquent, soient situées dans un même plan; 2° que cette résultante passe par le point fixe. Il suit de là que ce point doit se trouver dans le plan des deux forces, et que le moment de la résultante, par rapport au même point, doit être nul. Comme le moment de la résultante est égal à la somme des moments des composantes, il faut donc que cette dernière somme soit également nulle, et que, par conséquent, les moments des deux forces, par rapport au point d'appui, soient égaux et de signes contraires; c'est-à-dire que les deux forces doivent tendre à faire tourner le levier en sens contraires autour du point d'appui.

Donc, si du point F on abaisse sur les directions des forces P, Q, les perpendiculaires Fp, Fq, on aura, pour les conditions d'équilibre, P.Fp=Q.Fq.

Ainsi, *pour l'équilibre d'un levier sollicité par deux forces, il faut et il suffit : 1° que les deux forces soient dans un même plan avec le point d'appui; 2° que leurs moments par rapport à ce point soient égaux; 3° qu'elles tendent à faire tourner le levier en sens contraires.*

L'équation P.Fp=Q.Fq donnant la proportion

$$P : Q :: Fq : Fp,$$

on voit que la condition de l'égalité des moments revient à celle-ci : *les forces données doivent être en raison inverse de leurs distances au point d'appui.*

163. On peut trouver les mêmes conditions d'équilibre indépendamment de la théorie des moments.

Fig. 58. Car, soit R la résultante des deux forces P, Q, qui concourent au point C. Par le point d'appui F, menons les perpendiculaires Fp à P, Fq à Q, et les parallèles FA à Q, FB à P. Les triangles égaux AFC, BFC, donnent $\frac{1}{2}$ AC.Fp=$\frac{1}{2}$ AB.Fq; et comme les bases AC, BC, sont proportionnelles aux forces P, Q, on aura donc P.Fp=Q.Fq.

164. Quand un levier est sollicité par un nombre quelconque de forces, pour qu'il soit en équilibre, il faut et il suffit (112) que toutes ces forces aient une résultante unique, dont la direction passe par le point d'appui, ou bien encore (111) que les sommes des moments des forces, par rapport à trois axes rectangulaires menés par le point d'appui, soient nulles séparément.

Lorsqu'il y a équilibre, la pression exercée sur le point fixe est la résultante des forces du système. Or, cette résultante est la même que celle de toutes les

forces transportées parallèlement à elles-mêmes au point fixe, chacune avec sa grandeur et le sens de son action.

165. Dans le cas d'un levier droit AFB, sollicité par deux forces parallèles P, Q, la première des trois conditions d'équilibre (162) est remplie d'elle-même. Si l'on mène alors, du point fixe F, une perpendiculaire commune *pq* sur leurs directions, l'équation exprimant l'égalité des moments sera $P.Fq = Q.Fq$, ou bien $\frac{P}{Q} = \frac{Fq}{Fp}$. Fig. 59.
Or, les triangles semblables AFp, BFq, donnent

$$\frac{Fq}{Fp} = \frac{BF}{AF};$$

ainsi l'on aura

$$\frac{P}{Q} = \frac{BF}{AF}, \quad \text{ou} \quad P:Q::BF:AF.$$

Comme alors les longueurs AF, BF, sont ce qu'on nomme proprement les *bras de levier*, on voit que, dans ce cas, il faut et il suffit, pour l'équilibre, *que les deux forces soient en raison inverse de leurs bras de levier, et tendent à faire tourner le levier en sens contraires.*

166. On distingue trois espèces, ou, comme on dit, trois *genres* de leviers, suivant la position relative des deux forces par rapport au point d'appui. Néanmoins, les conditions d'équilibre restent les mêmes dans ces trois cas, où la puissance et la résistance peuvent d'ailleurs avoir des directions obliques ou parallèles.

1° Le levier est dit du *premier genre*, lorsque le point d'appui est situé entre les points d'application de la puissance et de la résistance : tel est le levier qu'on emploie pour soulever les fardeaux. Dans ce cas, la puissance a d'autant plus d'avantage que son bras de levier Ap est plus long. Fig. 60.

Fig. 61. 2° Le levier est dit du *second genre*, lorsque la résistance Q est appliquée entre le point d'appui A et la puissance. Alors les forces agissent en sens contraires, et la puissance a toujours de l'avantage, en ce sens que son bras de levier A*p* est plus long que celui de la résistance.

La brouette peut être considérée comme un levier de ce genre.

Fig. 62. 3° Le levier est dit du *troisième genre*, lorsque la puissance agit entre le point d'appui et la résistance. Alors c'est toujours la puissance qui a du désavantage, à cause de son bras de levier A*p* plus court que celui de la résistance.

On n'emploie ce genre de levier que dans les cas où la puissance doit agir dans un espace resserré, et où la résistance doit avoir une grande vitesse.

La perche à pêcher peut être considérée comme un levier de ce genre. Le pêcheur appuie l'une des extrémités contre son corps, qui est le point d'appui; le filet qu'il élève hors de l'eau est la résistance; et ses mains, appliquées entre la résistance et l'autre extrémité de la perche, sont la puissance (*).

Lorsque la puissance et la résistance sont parallèles, la charge du point d'appui est égale à leur somme, dans le levier du premier genre, et à leur différence, dans les deux autres genres.

(*) Quand on soulève un poids à bras tendu, le bras peut être regardé comme un levier du troisième genre. Car le point d'appui est à l'articulation de l'épaule, les muscles compris entre l'épaule et le coude sont la puissance, et la résistance est appliquée à l'extrémité de la main.

La mâchoire n'est pas un levier, comme le prétendent plusieurs médecins, mais bien un tour, puisqu'il y a deux points fixes.

167. Si l'on veut avoir égard à la pesanteur du levier, il faut regarder le poids de la verge comme une nouvelle force appliquée verticalement à son centre de gravité, et la combiner avec les autres forces données, comme si le levier était sans pesanteur.

Lorsque toutes ces forces sont dans un plan vertical passant par le point d'appui, la condition d'équilibre est que leurs moments et celui du poids du levier fassent une somme égale à zéro. Mais comme le moment du poids est nul de lui-même, lorsque la verticale, abaissée de son centre de gravité, passe par le point d'appui, si l'on veut que le poids du levier n'entre pour rien dans l'équilibre des forces appliquées, de sorte qu'on puisse ainsi en faire abstraction, il faudra disposer la verge de manière à satisfaire à cette condition.

168. Si le levier pouvait glisser sur une surface donnée, la position du point d'appui deviendrait variable, et les conditions exprimées plus haut (164) ne seraient plus suffisantes pour l'équilibre. Il faudrait encore que la résultante de toutes les forces, passant d'ailleurs par le point d'appui, fût normale à la surface. Car si elle lui était oblique, elle pourrait se décomposer en deux forces, l'une normale, qui serait détruite par la résistance de la surface, l'autre agissant dans le plan tangent, et qui entraînerait le levier avec tout son effet.

De la balance.

169. La balance ordinaire n'est autre chose qu'un levier du premier genre. Aux extrémités de ce levier MN, Fig. 63. qu'on appelle le *fléau* de la balance, sont suspendus par des cordons deux bassins destinés à recevoir les corps dont on veut comparer les poids.

Immédiatement au-dessus du point d'appui A est une aiguille mobile, qui peut décrire des arcs de cercle

dont ce point est le centre. On dit qu'une balance est *juste*, lorsqu'elle met toujours en équilibre des poids égaux, quelle que soit leur valeur, ce qui est indiqué par la direction verticale de l'aiguille. Dans le cas contraire, la balance est *fausse*.

Pour peser un corps, on le place dans l'un des bassins, et l'on met dans l'autre des poids connus, comme des kilogrammes et des parties de kilogramme, jusqu'à ce qu'il y ait équilibre.

Alors, si la balance est juste, le poids du corps sera indiqué par le nombre de kilogrammes et de parties de kilogramme employés. Mais cette indication sera erronée si la balance est fausse.

Voyons donc à quels caractères on reconnaît qu'une balance est juste. Soient P, Q, deux poids mis dans les bassins, R celui de la balance, et p, q, r, les distances du point d'appui aux trois forces P, Q, R. Pour qu'il y ait équilibre, il faut que leur résultante passe par le point d'appui A, c'est-à-dire que la somme de leurs moments Pp, Qq, Rr, par rapport à ce point, soit nulle. Or, les forces P, Q ont des moments de signes contraires, puisqu'elles tendent à faire tourner le levier en sens opposés, et le moment Rr sera positif ou négatif, selon que la balance aura son centre de gravité d'un côté ou de l'autre du point d'appui. Donc l'équation d'équilibre sera

$$Pp - Qq \pm Rr = o.$$

Mais pour que la balance soit juste, il faut que P et Q soient égaux, ce qui donne

$$P(p-q) \pm Rr = o.$$

Cette équation devant être satisfaite indépendamment de toute valeur particulière de P, on devra donc avoir

à la fois $p-q=o$ et $Rr=o$, ou bien, comme le poids R n'est pas nul, $p-q=o$ et $r=o$.

Ainsi, *pour qu'une balance soit juste, il faut 1° que son centre de gravité tombe sur la verticale passant par le point d'appui; 2° que les deux bras du fléau soient parfaitement égaux.*

Ces conditions sont d'ailleurs suffisantes, car dès qu'elles sont remplies, l'équation $P(p-q)\pm Rr=o$ est satisfaite, quel que soit P.

La première condition est facile à vérifier, car il suffit de soulever la balance, les bassins étant vides, et de voir si elle est en équilibre d'elle-même.

Dès que cette condition est remplie, on a $r=o$, et l'équation précédente, qui devient

$$P.p=Qq \quad \text{ou} \quad P.AM=Q.AN,$$

fournit alors un très-bon moyen de vérifier la seconde. Car après avoir reconnu que les poids P et Q se font actuellement équilibre, c'est-à-dire, satisfont à l'équation

$$P.AM=Q.AN,$$

en changeant les poids de bassin, ils devront encore se faire équilibre si la balance est juste. On aura donc aussi $Q.AM=P.AN$. Multipliant les deux équations membre à membre, il vient $P.Q.AM^2=P.Q.AN^2$, d'où $AM=AN$, c'est-à-dire que les bras du fléau sont égaux.

Ainsi donc, ayant établi l'équilibre entre deux poids, s'il subsiste encore, après avoir changé les poids de bassin, on est certain que la balance est juste.

Mais si l'équilibre ne subsiste plus, les bras du fléau seront inégaux, et la balance ne sera pas juste.

170. Au reste, il est facile de peser un corps très-exactement avec une balance fausse. On met ce corps P dans l'un des bassins, et on lui fait équilibre avec un

poids Q, ce qui satisfait à l'équation $P.AM = Q.AN$. On met ensuite le même corps dans l'autre bassin, et on lui fait équilibre avec un poids Q', ce qui satisfait à l'équation $P.AN = Q'.AM$. Multipliant ces deux équations membre à membre, il vient $P^2 = QQ'$, d'où

$$P = \sqrt{QQ'}.$$

Par conséquent, le poids du corps est exactement égal à la racine carrée du produit QQ', ou bien est moyen proportionnel entre ces deux poids (*).

On doit à Borda un moyen plus simple et indépendant de toute théorie. On l'emploie exclusivement dans la pratique ; il consiste à mettre le corps P dans un des bassins, et à lui faire équilibre avec des matières quelconques placées dans l'autre bassin. Alors on enlève le corps, et on le remplace par des poids connus, mis en nombre suffisant pour qu'il y ait encore équilibre. La valeur de ces poids donnera celui du corps.

Les deux moyens précédents se nomment *méthodes des doubles pesées*. La seconde est susceptible d'une précision indéfinie.

171. Lorsqu'une balance est en équilibre, comme les poids des deux corps et de la balance sont trois forces parallèles et de même sens, il est clair que la charge du point d'appui est égale à la somme de ces poids.

De la romaine.

Fig. 64. 172. La balance romaine est encore un levier droit du premier genre, mais dont les bras AB, AC sont inégaux

(*) Dans la pratique, on se borne à prendre pour le poids du corps la demi-somme $\frac{Q+Q'}{2}$, ce qui est presque toujours suffisant.

Le bras le plus long AB porte un poids connu P, que l'on peut faire glisser sur AB, au moyen d'un anneau. L'autre bras AC porte, à son extrémité C, soit un crochet à charnière, auquel on attache le corps qu'on veut peser, soit un bassin librement suspendu où l'on pose le corps. Dans cette machine, le poids mobile P est la force constante qui doit faire équilibre au poids d'un corps quelconque Q, suspendu à l'extrémité C; et, à cet effet, on amène l'anneau du poids P à une distance convenable AX du point d'appui A. Si donc chaque point X du bras AB indiquait en nombres le rapport des deux forces P, Q, dans l'état d'équilibre, on voit que pour peser les différents corps au moyen d'un seul poids P servant d'unité, il suffirait de déterminer le point X où le poids P fait équilibre au poids Q. Car alors le rapport marqué au point X, n'étant autre que celui de Q à P, donnera précisément le poids Q cherché.

Souvent la romaine est construite de telle sorte que le centre de gravité de toute la machine, y compris le crochet ou le bassin, tombe au point d'appui A. Dans ce cas, la loi d'équilibre entre les deux forces Q et P est la même que si la machine était sans pesanteur, c'est-à-dire que ces poids sont dans le rapport inverse de leurs bras de levier. Il est alors bien facile de marquer les différentes divisions de la romaine, ce qu'on appelle la *graduer*.

Lorsque le centre de gravité de la machine tombe à droite ou à gauche du point d'appui A, il est clair que le rapport de Q à P n'est plus en raison inverse des bras de levier de ces forces, mais doit être augmenté ou diminué, suivant la valeur du poids M de la machine et la distance AG de son centre de gravité G au point A. Néanmoins, les divisions de la romaine restent les mêmes que dans le cas précédent; mais leur origine, c'est-

à-dire, le point *zéro* de la graduation, au lieu d'être au point d'appui, doit être transporté, vers la droite ou vers la gauche, d'une certaine quantité AO, qu'on détermine comme on va le voir ci-après (172).

Dans le cas de la figure, pour que la machine soit en équilibre, il faut et il suffit que le moment P.AX de la force qui tend à la faire tourner à gauche soit égal à la somme M.AG+Q.AC des forces qui tendent à la faire tourner à droite. Ainsi l'équation d'équilibre est

$$(1)\qquad P.AX = M.AG + Q.AC.$$

172. Pour marquer les divisions de la romaine, on suspend à l'extrémité C un poids Q de dix kilogrammes, par exemple, et l'on note n° 10 le point du fléau AB où il faut amener le poids P pour qu'il y ait équilibre. On prend ensuite un poids Q de vingt kilogrammes, et l'on note n° 20 le point où il faut amener le poids P. Partageant alors l'intervalle de 10 à 20 en dix parties égales, et prolongeant les divisions tant à droite qu'à gauche des points extrêmes, le zéro de la graduation vient tomber en un certain point O, qui est le point de départ.

On peut encore déterminer directement le point O, en ne suspendant aucun corps à l'extrémité, et faisant glisser le poids P le long du fléau AC, jusqu'à ce que celui-ci devienne horizontal. Alors le centre de gravité de toute la machine, y compris le poids P, se trouve au point d'appui A, et, par conséquent, le zéro de la graduation doit se marquer au point d'arrêt O du poids P, puisque le poids Q est entièrement nul, et que d'ailleurs celui de toute la machine se trouve détruit par la résistance du point d'appui A.

173. Maintenant, pour faire voir comment l'équation (1) d'équilibre sert à déterminer le poids des corps, sup-

posons qu'on fasse successivement $Q = 10$ kil., et $Q = 20$ kil., ce qui donne, selon le cas, $AX = AO + 10$, et $AX = AO + 20$, on aura les équations

$$(2) \quad P(AO + 10) = M.AG + 10.AC,$$
$$(3) \quad P(AO + 20) = M.AG + 20.AC.$$

Les retranchant membre à membre, il vient

$$P = AC,$$

c'est-à-dire que le poids P contient autant d'unités de kilogramme que AC contient d'unités linéaires. Substituant à P cette valeur dans les équations (1) et (2), on obtient les suivantes

$$AC.AX = M.AG + Q.AC,$$
$$AC(AO + 10) = M.AG + 10.AC,$$

qui, retranchées l'une de l'autre, membre à membre, donnent

$$AC(AX - AO - 10) = (Q - 10)AC,$$

d'où $$Q = AX - AO.$$

Donc le poids Q du corps qu'on veut peser contient autant d'unités de kilogramme qu'il y a d'unités linéaires comprises entre le point zéro ou O, et le point d'arrêt X du poids P. Le nombre écrit au point X indiquera donc le poids Q du corps.

Si l'on veut avoir les hectogrammes contenus dans le poids du corps, il faut partager les premiers intervalles marqués chacun en dix parties égales, et ainsi de suite.

174. Comme la romaine n'exige qu'un seul poids pour peser les différents corps, elle est donc utile dans une foule de cas où la balance ordinaire, qui en exige plusieurs, ne serait d'aucun secours. Un autre avantage de la romaine est que la charge ou la pression du point d'appui s'y trouve moins forte que dans la balance or-

dinaire, où cette pression égale le double du poids du corps, ou 2Q, tandis qu'elle est seulement $P+Q$ dans la romaine, ou même Q en faisant entrer le poids P dans celui de la machine.

175. La romaine peut être inexacte par suite de trois causes différentes, savoir :

1° *Lorsque les divisions ne sont pas toutes de même longueur.*—On peut les vérifier en les mesurant au compas, d'abord une à une, puis de dix en dix.

2° *Lorsque le poids* P *n'est pas proportionnel au bras de levier* AC. — Pour voir si ce poids est trop fort ou trop faible, on le met au point 10, on suspend au point C un poids de 10 kilogrammes, et si l'équilibre n'a pas lieu, on l'établit avec du sable ou de la limaille. Alors on remplace le poids de dix kilogrammes par un autre de vingt kilogrammes, et l'on fait glisser le poids P jusqu'à ce qu'il y ait équilibre. S'il s'arrête au point 20, c'est une preuve qu'il est proportionnel à AC. S'il s'arrête au point 19, comme P.AX est un produit constant, il est clair que la valeur de AX étant trop petite, le poids P se trouve trop fort, alors on le lime convenablement. Mais s'il s'arrête au point 21, la valeur de AX étant trop grande, le poids P se trouve trop faible, et il faut alors le charger.

3° *Lorsque le zéro de la graduation est mal placé.* — Nous avons vu (172) qu'on peut déterminer de deux manières le point zéro, dont la position dépend du poids M de la machine et de la distance AG de son centre de gravité G au point d'appui A. Car, si la romaine est exacte, en supprimant le poids Q, on doit avoir

$$P.AO=M.AG.$$

Dans le cas contraire, si l'on met en C un poids $Q=10$ kil., le poids P s'arrêtera, par exemple, au point 9. On devra

donc, dans ce cas, diminuer la longueur AB du bras de levier, c'est-à-dire, rapprocher le point zéro d'une division vers le point d'appui. Si le poids P s'arrêtait au point 11 au lieu du point 9, on ferait la correction d'une manière inverse.

Du peson.

176. Le *peson*, qui sert encore à évaluer les poids, n'est autre chose qu'un levier BAC, coudé à angle droit, et mobile autour d'un point d'appui A, situé à l'extrémité d'un support vertical AV. Le bras AC, au bout duquel on suspend les corps, est prolongé, de l'autre côté du point d'appui, d'une longueur AD=AC, de manière à donner au peson la forme d'un T. Alors les deux bras AC, AD, étant symétriques par rapport au point d'appui A, le centre de gravité de la branche CD se trouve en ce point, et comme, par conséquent, le poids du bras AC se trouve détruit dans toutes les positions de la machine autour du point d'appui, on peut se dispenser d'en tenir compte dans la recherche des conditions d'équilibre. Le bras AB a la forme d'une aiguille, dont la pointe est d'une matière très-dense, et son propre poids, augmenté de celui d'une lentille qu'on fixe ordinairement sur l'aiguille à cet effet, est destiné à faire équilibre aux corps que l'on veut peser. Enfin un arc ME, gradué comme nous l'indiquerons tout à l'heure, et dont le centre est au point A, part du bas du support ou plutôt d'un point M, tel que AM=AB. Fig. 65.

La machine étant libre, la direction de l'aiguille AB se confond avec la verticale AV, et le bras AC se trouve horizontal. Mais si l'on suspend en C un poids Q, son action faisant tourner le levier autour du point A, l'aiguille AB s'écarte de la verticale, le bras AC s'abaisse,

et lorsque l'équilibre s'est rétabli, les moments du poids Q et du poids p de l'aiguille AB, par rapport au point A, sont égaux. Or si, du point de suspension C et du centre de gravité G de l'aiguille, on abaisse sur AV les perpendiculaires CI, GH, les moments de Q et de p seront Q.CI et p.GH. Ainsi l'équation d'équilibre est

$$p.GH = Q.CI, \quad \text{d'où } Q = \frac{p.GH}{CI}.$$

Maintenant, si l'on prolonge l'aiguille AB jusqu'à ce qu'elle rencontre au point N_1 l'horizontale MN menée par le point M, on formera le triangle AN_1M, qui sera semblable au triangle AGH et au triangle AIC, de sorte qu'on aura les proportions

$$AN_1 : AG :: MN_1 : GH = \frac{AG.MN_1}{AN_1},$$

$$AN_1 : AM :: AC : CI = \frac{AC.AM}{AN_1}.$$

Substituant à GH et à CI leurs valeurs dans l'équation précédente, il vient

$$Q = \frac{p.AG}{AC} \cdot \frac{MN_1}{AM}.$$

Comme $\frac{MN_1}{AM}$ est la tangente de l'angle MAN_1, si l'on désigne cet angle par φ, et qu'on fasse $AG = R$, $AC = r$, on aura enfin

$$(1) \quad Q = \frac{p.R}{r} \cdot \text{tang. } \varphi.$$

Donc, puisque les trois quantités p, R, r, sont constantes, le poids Q du corps que l'on veut peser varie dans le même rapport que la tangente de l'angle φ.

D'après ce principe, il est facile de graduer l'arc ME,

de manière qu'il donne immédiatement le poids d'un corps suspendu au point A. Car si l'on suspend d'abord un poids connu, par exemple, un kilogramme, l'aiguille prendra la direction AN_1, et la distance MN_1 sera la tangente de l'angle actuel $\varphi = MAN_1$. Donc, d'après l'équation (1), si l'on partage la tangente indéfinie MN, à partir du point M, en parties égales à MN_1, les longueurs successives MN_1, MN_2, MN_3,... seront les tangentes de l'angle φ, relatives aux poids de 1, 2, 3,... kilogrammes ; et les droites menées du centre A aux points de division M, N_1, N_2, N_3,... couperont l'arc ME en des points où l'on devra écrire les nombres 0, 1, 2, 3,.... Si l'on suspend alors un corps au point A, le point où s'arrêtera l'aiguille indiquera le poids du corps à un kilogramme près. Si l'on veut obtenir une plus grande approximation, par exemple, les hectogrammes contenus dans le corps, on partagera chacun des intervalles MN_1, N_1N_2,... en dix parties égales, et par la construction précédente, on déterminera les points des arcs M...1, 1...2,.... où il faudra écrire les nombres qui correspondront aux hectogrammes.

177. La proportion $Q:p::R\tang\varphi:r$, qu'on déduit de l'équation (1), montre que le poids p de l'aiguille, tel petit qu'on le suppose, peut toujours faire équilibre à un poids Q, aussi grand qu'on le voudra. En effet, la tangente de l'angle φ pouvant surpasser toute quantité donnée, il en est de même du poids Q. Le peson sert donc à peser des fardeaux considérables, pour lesquels la romaine n'est plus d'aucun secours. Néanmoins, il est à remarquer que cette propriété du peson a des limites dans la pratique, par suite de plusieurs causes, dont la principale est que les divisions supérieures de l'arc de cercle, devenant de plus en plus petites, finissent par cesser d'être suffisamment distinctes. Aussi lors-

qu'on veut peser de lourds fardeaux, d'après la formule

$$\tan \varphi = \frac{r}{pR} \cdot Q,$$

on charge d'un poids convenable l'extrémité B de l'aiguille, pour la maintenir dans la partie moyenne du quadrant, où les divisions sont plus espacées entre elles, et, par conséquent, plus nettes.

De la poulie.

178. La *poulie* se compose d'une roue circulaire, ou
Fig. 66. poulie proprement dite, et d'une chape. La roue ABO est creusée en gorge à sa circonférence, pour recevoir une corde, et mobile autour d'un axe rigide C, nommé boulon, qui la traverse à son centre. La chape CH est un corps de forme quelconque, enveloppant la poulie en totalité, ou seulement en partie, et offrant un vide où elle peut tourner librement.

On distingue la *poulie fixe*, dont l'axe résiste dans tous les sens à une pression quelconque, et la *poulie mobile*, dont l'axe est entièrement libre dans l'espace.

Fig. 66. 179. 1° *Poulie fixe.* Soit ABO une poulie fixe enveloppée, dans une partie AB de sa circonférence, par une corde PABQ, dont les extrémités sont tirées par deux forces P, Q. Ces forces, étant censées agir dans un plan perpendiculaire à l'axe, sont donc tangentes à la circonférence aux points A et B; par conséquent, si l'on mène les rayons CA, CB, passant par ces points, les forces P, Q pourront être considérées comme appliquées aux extrémités d'un levier coudé ACB, à bras égaux. Or, pour qu'un levier soit en équilibre, les forces doivent être en raison inverse de leurs distances au point fixe. On aura donc P : Q :: CB : CA, et comme CB = CA,

il est clair que la seule condition d'équilibre de la poulie est $P = Q$.

Puisque le point d'appui est sur l'axe, et que la puissance et la résistance agissent toujours tangentiellement à la circonférence, quelle que soit la direction des cordons qui les mettent en mouvement, on voit que la rotation de la poulie offre une suite non interrompue de leviers, qui viennent successivement se présenter à angle droit à l'action de la puissance. Par conséquent, l'équilibre de la poulie se rapporte très-naturellement à l'équilibre du levier, et non à celui du tour, quoique la poulie tourne autour d'un axe fixe ; en effet, le plan des deux forces appliquées déterminant une section circulaire dont le centre est un point de l'axe, on peut considérer la poulie comme réduite à un cercle assujetti à tourner dans son propre plan autour d'un point fixe, qui est le centre.

180. Quant à la pression exercée sur le point fixe, dans le cas d'équilibre, elle égale évidemment la résultante R des deux forces P, Q. Si donc, à partir de leur point de concours D, on prend deux longueurs égales DE, DF, pour représenter leurs intensités, et qu'on achève le losange DEFG, la diagonale DG exprimera la valeur de la pression. Or, si l'on joint AB, on formera un triangle isocèle CAB semblable au triangle DEF, puisque leurs côtés seront perpendiculaires chacun à chacun. On aura donc $DG : DE :: AB : AC$. Ainsi, *la pression exercée sur le point fixe est à l'une des deux forces égales appliquées à la corde, comme la sous-tendante de l'arc embrassé par la corde est au rayon de la poulie* (*).

(*) On met ici, selon l'usage, l'ancien mot *sous-tendante* pour ne pas employer deux fois de suite le mot corde dans deux acceptions différentes.

Lorsque les deux forces données sont parallèles, la sous-tendante est un diamètre du cercle, et la pression, devenant double de l'une des deux forces, acquiert son *maximum* d'intensité.

Si les deux forces embrassent un sixième de la circonférence de la poulie, la sous-tendante de cet arc est égale au rayon, et la pression a pour valeur l'une des deux forces appliquées.

On voit, par ce qui précède, que la poulie fixe sert à changer la direction d'une force, tout en lui conservant la même intensité. Elle sert également à transmettre l'action d'une force à un point donné hors de sa direction.

Fig. 67. 181. 2° *Poulie mobile.* — Soit ABO une poulie mobile enveloppée, dans la partie AB de sa circonférence, par une corde PABF attachée à un point fixe F. L'autre extrémité de la corde est soumise à l'action de la force P ou puissance, et la résistance à vaincre est le poids Q, suspendu à la chape. Comme le point F éprouve, dans l'état d'équilibre, une certaine pression qui s'exerce dans le sens FB, on voit que la résistance de ce point peut être assimilée à une force R, égale et contraire à cette pression, c'est-à-dire, agissant dans le sens BF. Ainsi les conditions d'équilibre seront celles d'un corps libre soumis à l'action des trois forces P, Q, R; il faut donc que la résistance Q soit égale et contraire à la résultante des deux forces P, R. D'abord celles-ci sont égales entre elles; car s'il en était autrement, en fixant le centre de la poulie, on détruirait la force Q, et il resterait seulement les forces P, R, qui doivent se faire équilibre. Or, l'égalité de ces forces est la condition d'équilibre pour la poulie fixe. Donc, lorsque la poulie est mobile, on a de même $P = R$, c'est-à-dire que la pression exercée sur le point F, ou la tension de

la corde BF, est égale à la puissance appliquée P.

Cela posé, si, à partir du point de concours D de ces forces, on prend deux longueurs égales DE, DF, pour représenter leurs intensités, et qu'on achève le losange DEGF, la diagonale DG exprimera l'intensité de la résistance Q. On aura donc P:Q::DE:DG. Or, en joignant AB, AC, CB, on formera un triangle CAB semblable au triangle DEG (180), et l'on aura

DE:DG::CA:AB, ou P:Q::CA:AB.

Donc, *la puissance est à la résistance comme le rayon de la poulie est à la sous-tendante de l'arc embrassé par la corde.*

Enfin, à cause de P=R, on a aussi Q:R::AB:CA.

Donc, *la force appliquée au centre de la poulie, ou la résistance, est à la tension de la corde comme la sous-tendante de l'arc qu'elle enveloppe est au rayon de la poulie.*

Lorsque les deux parties de la corde sont parallèles, la sous-tendante est égale au diamètre ou au double du rayon. Alors la puissance, n'étant que la moitié de la résistance, acquiert son *minimum* d'intensité nécessaire pour l'équilibre : c'est le cas le plus favorable pour la puissance.

182. Remarque. Le principe qu'on vient d'employer n'est qu'un cas particulier du théorème général suivant :

Si trois forces se font équilibre, et que l'on construise un triangle dont les côtés soient respectivement perpendiculaires à leurs directions, chacune des trois forces sera proportionnelle au côté qui lui est perpendiculaire.

En effet, lorsque trois forces P, Q, R se font équilibre, l'une quelconque d'entre elles, R par exemple, est égale et contraire à la résultante DG des deux autres Fig. 68.

représentées par DE, DF; et l'on a

P : Q : R : : DE : DF : DG.

Mais si l'on construit un triangle ABC, dont les côtés soient respectivement perpendiculaires aux directions des forces, on aura

DE : EG ou DF : DG : : AC : BC : AB.

Or, la comparaison des deux proportions précédentes donne, conformément à l'énoncé du théorème,

P : Q : R : : AC : BC : AB.

Comme les auteurs se servent de ce théorème presque pour chaque machine, nous avons préféré l'établir à part une fois pour toutes. Il permet de simplifier les démonstrations dans un grand nombre de cas, par exemple, pour la poulie mobile (181), où il donne immédiatement

P : Q : R : : AC : BC : AB,

d'où l'on conclut les deux résultats établis dans le n° cité.

Des systèmes de poulies et des moufles.

183. D'après les considérations exposées plus haut (161), nous allons traiter, immédiatement après la poulie simple, les machines composées formées d'un système quelconque de poulies mobiles réagissant les unes sur les autres.

Prenons le système représenté dans la figure 69. Une première poulie A′ porte suspendu à sa chape un poids R qui est la résistance. Elle est embrassée, dans une partie quelconque de sa circonférence, par une corde attachée d'un côté au point fixe F′, et de l'autre côté à la chape d'une seconde poulie A″. Celle-ci est de même embrassée par une corde attachée d'un côté à un second point fixe F″, et de l'autre côté à la chape d'une troisième poulie A‴;

ainsi de suite jusqu'à la dernière poulie, dont la corde est attachée d'un côté à un point fixe F''', et reçoit de l'autre côté l'action d'une puissance P.

Comme le système de toutes ces poulies mobiles est variable, il est clair que l'équilibre général ne peut avoir lieu, à moins que chaque poulie ne soit séparément en équilibre, par suite des forces ou des tensions qui la sollicitent. Si donc on représente par X', X'', X''' les tensions des cordons successifs, par c', c'', c''' les sous-tendantes des arcs qu'ils embrassent, et par r', r'', r''' les rayons des poulies, on aura (181),

pour l'équilibre de la poulie A', $X' : R :: r' : c'$,
pour celui de la poulie A'', $X'' : X' :: r'' : c''$,
pour celui de la poulie A''', $P : X'' :: r''' : c'''$.

Multipliant ces proportions par ordre, on trouve, pour la condition de l'équilibre du système,

$$P : R :: r' r'' r''' : c' c'' c''',$$

ce qui s'énonce:

La puissance est à la résistance comme le produit des rayons des poulies est au produit des sous-tendantes des arcs embrassés par les cordes.

184. Dans le cas où tous les cordons sont parallèles, les sous-tendantes c', c'', c''' égalent les diamètres $2r'$, $2r''$, $2r'''$ des poulies, de sorte qu'en divisant par le produit $r' r'' r'''$ les deux derniers termes de la proportion ci-dessus, on a Fig. 70.

$$P : R :: 1 : 2 . 2 . 2.$$

Si donc on désigne par n le nombre des poulies, il vient

$$P : R :: 1 . 2^n.$$

Ainsi *la puissance est à la résistance comme l'unité est au nombre 2 pris avec un exposant égal au nombre des poulies.*

Ce cas particulier est le plus favorable à la puissance, qui acquiert alors son *minimum* d'intensité $\frac{R}{2^n}$. On voit qu'avec un nombre suffisant de poulies, un poids quelconque, suspendu au centre de la première, pourra être tenu en équilibre par une force aussi petite qu'on le voudra. Enfin, lorsque chacun des arcs embrassés par les cordes est le sixième de la circonférence, les sous-tendantes égalent les rayons de leurs poulies respectives, et la puissance est égale à la résistance.

185. Il y a plusieurs moyens de grouper les poulies pour augmenter l'effet qu'on veut produire. La disposition la plus commode et la plus en usage consiste à les assembler dans une même chape, soit sur des axes différents (*fig.* 71), soit sur le même axe (*fig.* 72). Dans ces deux cas l'assemblage se nomme *moufle*, ou encore *palan*, en terme de marine. Dans la pratique, on emploie en même temps une moufle fixe et une moufle mobile, dont la chape porte le poids R ou la résistance à vaincre. Toutes les poulies sont embrassées par une même corde, dont une extrémité est attachée à la chape de l'une des deux moufles, et dont l'autre extrémité reçoit l'action d'une puissance P. Pour trouver les conditions d'équilibre des deux forces P, R, nous ferons abstraction du poids de la machine, et nous supposerons, ce qui a presque toujours lieu, les poulies choisies de manière que les différentes parties de la corde soient sensiblement parallèles. Comme toutes les poulies doivent être séparément en équilibre, il est évident que les diverses parties de la corde commune éprouvent alors des tensions égales. Donc les tensions des cordons, en nombre n, par exemple, qui soutiennent le poids et vont directement d'une moufle à l'autre, peuvent être regardées comme autant de forces parallèles et de même sens, égales à la puissance P, et

Fig. 71 et 72.

appliquées aux points de contact des cordons avec les circonférences des poulies de la moufle mobile. Or ces forces doivent avoir une résultante égale et directement opposée au poids R, auquel elles font équilibre. Donc on aura

$$R = nP\text{, d'où } P = \frac{R}{n}.$$

Donc *la puissance est égale à la résistance divisée par le nombre de cordons qui soutiennent la moufle mobile.*

Cet énoncé convient aux deux systèmes représentés dans les figures 71 et 72.

Du tour.

186. Le tour, dans l'acception la plus générale du mot, est un corps solide, de forme quelconque, n'ayant que la liberté de tourner autour d'un axe fixe (161). Mais dans les arts, ce qu'on appelle *tour*, *treuil* ou *cabestan*, selon l'objet particulier de l'appareil, est un cylindre terminé par deux *tourillons* également cylindriques, de même axe, et d'un diamètre plus petit. Ces tourillons reposent sur des *crapaudines* encastrées dans des supports fixes, de manière que le cylindre peut seulement prendre un mouvement de rotation autour de son axe considéré comme une droite fixe.

La résistance à vaincre communique à la machine par une corde qui s'enroule autour du cylindre, et la puissance, destinée à le faire tourner, est appliquée tangentiellement à une roue d'un plus grand rayon, fixée d'une manière invariable au cylindre, et perpendiculairement à l'axe où est situé le centre de la roue. On peut encore appliquer la puissance au cylindre, soit au moyen d'une manivelle, soit au moyen de barres ou leviers qui le traversent à angle droit, comme dans le treuil d'une *chèvre* dont on se sert pour élever les fardeaux.

Le tour s'appelle spécialement *tour* ou *treuil* lorsque l'axe est horizontal, et *cabestan* lorsque l'axe est vertical. Mais, dans tous les cas, quels que soient la disposition de la machine et le mode d'application de la puissance, les conditions d'équilibre sont exactement les mêmes. Nous nous bornerons donc à déterminer ces conditions pour le tour ordinaire, dont l'axe est horizontal, et qui reçoit l'action de la puissance au moyen d'une corde appliquée tangentiellement à une roue verticale.

Fig. 73. 187. Soient AB l'axe commun du cylindre et des tourillons, C le centre de la roue, P la puissance agissant au point D de sa circonférence suivant la tangente DP menée en ce point, et R le poids à élever ou la résistance agissant suivant une verticale ER tangente à la circonférence de la section circulaire EO faite au point de contact E par un plan perpendiculaire à l'axe AB.

Il est facile d'obtenir les conditions d'équilibre entre les forces P, R, en supposant que la machine est sans pesanteur, ou, ce qui revient au même, que son poids est une force dirigée vers l'axe fixe, ce qui a ordinairement lieu, et en regardant les cordes comme des fils infiniment déliés. Car les rayons CD, OE mesurant les distances des forces P, R, à l'axe AB, leurs moments, par rapport à cet axe, seront P.ED, R.OE. On aura donc pour l'équation d'équilibre $R . CD + R . OE = 0$.

On voit, par cette équation, que les forces P, R, ont leurs moments égaux en valeur absolue, mais de signes contraires. Donc ces forces tendent à faire tourner le cylindre en sens opposés, et de plus on a la proportion

$$P : R :: OE : CD.$$

Ainsi, *pour l'équilibre du tour, la puissance doit être à la résistance comme le rayon du cylindre est au rayon de la roue.*

188. La condition d'équilibre est donc la même que pour le levier, excepté que les forces doivent être en raison inverse de leurs distances *à un axe fixe*, et non à un point fixe, comme dans le levier. La relation ci-dessus peut s'obtenir directement, sans faire usage de la théorie générale des moments. En effet, si, dans le plan horizontal passant par l'axe AB, on mène par le point C le rayon CF parallèle au rayon OE, comme les extrémités E, F de ces rayons se trouvent situées l'une en arrière, l'autre en avant de l'axe AB, il est clair que la droite EF rencontrera cet axe en un point G; et les deux triangles EOG, CFG, ainsi formés, seront égaux, comme ayant les angles égaux chacun à chacun, et CF = OE. On aura donc EG = GF. Cela posé, appliquons au point F deux forces verticales R′, R″, égales à R et opposées entre elles, ce qui n'altère pas l'effet des forces données, la résultante S des deux forces R, R″, égales, parallèles et de même sens, passera par le point G milieu de EF, et par conséquent sera détruite par la résistance de l'axe. Il ne restera donc que les deux forces P, R′, dirigées dans le plan de la roue, et agissant aux extrémités du levier coudé FCD. Ainsi, d'après la loi de l'équilibre du levier, on aura Fig. 73.

$$P : R' \text{ ou } R :: C F \text{ ou } O E : C D.$$

On voit que les deux forces P, R′ doivent avoir une résultante S′ passant par le point d'appui C qui est sur l'axe.

189. Si l'on veut avoir égard au diamètre des cordes, on peut admettre que les forces P, R exercent leur action suivant l'axe de la corde où elles sont appliquées. Leurs bras de levier respectifs devront alors être augmentés des rayons des cordes, et la condition d'équilibre sera

La puissance P *est à la résistance* R *comme le rayon*

du cylindre, augmenté du rayon de la corde ER, *est au rayon de la roue, augmenté du rayon de la corde* DP.

Cette condition redeviendrait identique avec la première, dans le cas où les rayons des deux cordes ER, DP seraient proportionnels aux rayons du cylindre et de la roue.

190. Lorsqu'un tour est sollicité par des forces quelconques, il suffit, pour l'équilibre, que la somme des moments de toutes les forces, par rapport à l'axe, soit nulle (114). Or, si l'on suppose, d'une part, la puissance P appliquée en un point D de la roue suivant une droite DP qui fasse avec l'axe AB un angle a, d'autre part, la résistance composée d'un nombre quelconque de forces R, R', R'', etc. .... dirigées comme on voudra dans l'espace, et appliquées à des points liés d'une manière invariable avec l'axe du tour, ce qui est le cas le plus général, en appelant d la plus courte distance de la droite DP à l'axe AB, et N la somme des moments des résistances par rapport au même axe, on aura pour l'équation d'équilibre

$$P d \sin a + N = 0.$$

En effet, la projection de la force P sur le plan de la roue égalant $P \sin a$, le produit $P d \sin a$ de cette projection par sa plus courte distance d à l'axe AB, est précisément le moment de la force P par rapport à cet axe; de sorte que la somme des moments de toutes les forces du système est le premier membre de l'équation ci-dessus. Cette équation donne, pour la valeur de la puissance,

$$P = -\frac{N}{d \sin a}.$$

Or les quantités d et $\sin a$ ne peuvent être nulles ni l'une ni l'autre, lorsque la droite DP n'est pas située

dans un même plan avec l'axe AB; donc, ce dernier cas excepté, on peut toujours, avec une seule force P appliquée à la roue d'un tour, faire équilibre à des résistances quelconques R, R′, R″, ... prises en tel nombre qu'on voudra. Comme de plus, la valeur $\frac{-N}{d \sin a}$ de P devient un *minimum* pour $\sin a = 1$ et $d = CD$ ou le rayon de la roue, on voit que la disposition la plus favorable pour la puissance est d'abord d'être dirigée dans un plan perpendiculaire à l'axe, c'est-à-dire, dans le plan de la roue, et en second lieu, d'être tangente à la roue, comme on l'a supposé pour le cas des deux forces.

Des pressions exercées sur les appuis.

191. Nous savons (188) que, dans l'état d'équilibre, les deux forces P, R, se réduisent aux deux autres S, S′ appliquées aux points G, C, de l'axe fixe. Il n'y a donc que ces deux forces S, S′ qui puissent charger l'axe AB, et, par suite, les appuis M, N. Or il est facile de voir que les pressions provenant des forces S, S′, sont les mêmes que les pressions exercées par les forces R, P, transportées parallèlement à elles-mêmes aux points O et C, centres des circonférences OE, CD. En effet, la force S étant la résultante des deux forces R, R″, si on la décompose en deux autres X, X′, parallèles et de même sens, appliquées aux points O, C, à cause de $OG = OC$, il est clair que chacune des forces X, X′ égalera $\frac{S}{2}$, ou bien R. De même la force S′, résultante des forces P, R′, se décompose en deux autres Y, Y′, égales et parallèles à P, R′, et appliquées au point C. Or, les composantes X′, Y′, étant égales et parallèles à R″, R′, se détruisent; et il ne reste plus que les composantes X, Y, ou R, P, appliquées aux points O, C.

Donc *la pression exercée sur l'axe du tour par les deux forces appliquées* P, R, *est exactement la même que si ces forces étaient transportées parallèlement à elles-mêmes au centre des sections déterminées par les plans perpendiculaires qui les contiennent.*

Maintenant si l'on veut connaître les pressions supportées par chacun des appuis M, N, on décomposera la force R, censée appliquée en O, en deux autres parallèles r, r', appliquées aux points M, N, et de même la force P, censée appliquée en C, en deux autres parallèles p, p' appliquées aux mêmes points. La pression de chaque appui sera exprimée en grandeur et en direction par la résultante des deux forces r, p, ou r', p', qui s'y trouvent.

Nous avons supposé que le poids du tour a son centre de gravité sur l'axe fixe. On obtiendra les pressions que cette force verticale V exerce sur les appuis M, N, en la décomposant en deux autres v, v', appliquées à ces points.

Ainsi, en définitive, la pression ou la charge de chacun des appuis M, N, sera déterminée par la résultante des trois forces r, p, v, ou r', p', v', appliquées à ces deux points. On connaîtra donc ainsi le degré de résistance dont les deux appuis doivent être capables pour la solidité de la machine.

Lorsque le tour est sollicité par un nombre quelconque de forces dirigées arbitrairement dans [illegible] on obtient les pressions des points d'appui par la méthode générale exposée plus haut (117).

192. Voici une espèce de tour qui n'est pas employée, mais qui serait probablement fort utile dans la pratique, en permettant de diminuer presque indéfiniment la puissance capable de faire équilibre à une résistance donnée.

Fig. 74. Concevons un tour dont le cylindre, au lieu d'être

uniforme, offre deux grosseurs différentes, et forme deux cylindres contigus de même axe, dont les rayons sont OE, OF. La résistance est un poids R suspendu à la chape d'une poulie embrassée par une corde. Une extrémité de la corde s'enroule dans un sens sur le petit cylindre, par exemple d'avant en arrière, et l'autre extrémité s'enroule sur le grand cylindre dans le sens opposé, ou d'arrière en avant; de sorte que la corde s'enroule d'un côté, en même temps qu'elle se déroule de l'autre. Le grand cylindre porte une roue d'un rayon [illegible], qui reçoit tangentiellement l'action de la puissance comme dans le tour ordinaire.

Il s'agit de trouver le rapport des deux forces P, R, dans l'état d'équilibre. A cet effet, supposons la force R remplacée par deux autres égales à $\frac{1}{2}$ R, agissant suivant les cordons IG, LH de la poulie, et appliquons, suivant la direction de la puissance P, deux forces auxiliaires égales et contraires $+X$, $-X$, ce qui ne change rien à l'état du système.

Comme la force $-X$ et la force $\frac{1}{2}$ R dirigée suivant IG agissent aux extrémités d'un levier coudé, pour qu'elles se fassent équilibre, il faudra qu'on ait

$$X : \frac{1}{2}R :: OE : CD.$$

De même, pour l'équilibre des forces $P+X$ et de la force $\frac{1}{2}$ R dirigée suivant LH, on aura

$$P+X : \frac{1}{2}R :: OF : CD.$$

Ces deux proportions donnent les équations

$$2X.CD = R.OE, \quad 2P.CD + 2X.CD = R.OF;$$

si on retranche la première de la seconde, il vient

$$2P.CD = R(OF - OE),$$

d'où l'on tire

$$P:R::OF-OE:2CD.$$

Ainsi, dans l'état d'équilibre, *la puissance est à la résistance, comme la différence des rayons des deux cylindres est au rayon de la roue.*

193. On voit que si la différence OF—OE des rayons des deux cylindres est une très-petite fraction, par rapport au diamètre 2CD de la roue, la puissance sera de même une très-petite fraction par rapport à la résistance; et comme on peut augmenter à volonté le rayon du petit cylindre, de manière à le rapprocher indéfiniment de celui du grand cylindre, il est clair qu'avec une très-petite puissance on pourra faire alors équilibre à un poids considérable. Si les deux rayons étaient égaux, on aurait $P=0$, et la machine serait en équilibre d'elle-même.

Déterminons, par exemple, le rapport qui doit exister entre la différence δ des rayons des deux cylindres, et le rayon ρ de la roue, pour faire équilibre à un poids de 1000 kilogrammes avec une puissance équivalente à 1 kilogramme. Dans ce cas la proportion ci-dessus devient $1:1000::\delta:2\rho$, d'où $\delta = \frac{2\rho}{1000}$. Si donc le rayon ρ de la roue égale 1 mètre, on aura $\delta = 0^m,002$, c'est-à-dire que les rayons des deux cylindres doivent avoir 2 millimètres de différence. On obtient aisément ce résultat, en prenant d'abord un cylindre uniforme, dont on recouvre une portion par une feuille de zinc d'un millimètre d'épaisseur.

Des systèmes de tours.

194. Cherchons, comme nous l'avons fait (183) pour un système de poulies, la loi d'équilibre d'un système de tours réagissant les uns sur les autres, suivant la disposition indiquée par la figure 75. La résistance est un poids R suspendu à une corde enroulée sur le cylindre du premier tour; la corde appliquée à la roue n'est pas soumise immédiatement à l'action de la puissance, mais s'enroule sur le cylindre du second tour. De même la corde appliquée à la roue de ce second tour s'enroule sur le cylindre d'un troisième tour, et ainsi de suite jusqu'au dernier tour, dont la roue reçoit immédiatement l'action de la puissance P tangente à sa circonférence. Fig. 75.

Lorsque le système est en équilibre, chaque tour doit être séparément en équilibre, en vertu des tensions des cordes agissant sur le cylindre et sur la roue. Or si l'on nomme respectivement r, r', r'', les rayons des cylindres, et r_1, r_1', r_1'', ceux des roues, en appelant X la tension du cordon qui relie les deux premiers tours, on aura (187)

$$X : R :: r : r_1.$$

On aura de même, en nommant Y la tension du cordon suivant,

$$Y : X :: r' : r_1'.$$

Enfin, le dernier tour donnera

$$R : Y :: r'' : r_1''.$$

Multipliant toutes ces proportions par ordre, il vient

$$P : R :: r\, r'\, r'' : r_1\, r_1'\, r_1''.$$

Donc, lorsqu'il y a équilibre, *la puissance est à la résistance comme le produit des rayons des cylindres est au produit des rayons des roues.*

Des roues dentées.

195. Dans la pratique, on n'emploie pas les systèmes de tours, à cause de l'embarras que causeraient les cordes. Mais si l'on conçoit les tours successifs d'un système rapprochés de manière que la roue du premier touche le cylindre du second, la roue de celui-ci le cylindre du troisième, ainsi de suite; et si l'on admet que chaque roue ne puisse tourner sans mettre en mouvement le cylindre contigu, et réciproquement; alors, on pourra supprimer tous les cordons intermédiaires, sans changer la valeur du rapport établi (194) entre la puissance et la résistance. Or, à l'aide des *engrenages*, on peut solidement relier chaque roue au cylindre contigu.
Fig. 76. Le procédé consiste à garnir leurs circonférences de *dents* ou filets saillants, également espacés entre eux, et parallèles aux axes des cylindres. Ces dents engrènent de telle sorte les unes dans les autres, qu'une roue et un cylindre contigus en étant garnis, l'un ne peut tourner sur son axe, que l'autre ne tourne en même temps sur le sien. La roue s'appelle alors *roue dentée*, et le cylindre se nomme le *pignon* de la roue.

Ainsi, pour qu'il y ait équilibre entre une puissance et une résistance réagissant l'une sur l'autre, au moyen d'un système de roues dentées et de pignons, on aura la condition suivante :

La puissance est à la résistance comme le produit des rayons des pignons est au produit des rayons des roues.

196. Cette proportion pourrait s'établir directement, comme on l'a fait pour un système de tours. Mais il est à remarquer que les roues de plusieurs tours successifs tournent toutes dans le même sens, tandis que,

dans les engrenages, les roues impaires tournent dans un sens, et les roues paires dans le sens opposé.

Il faut encore savoir qu'on doit prendre pour le rayon d'une roue dentée, non la distance du centre à l'extrémité des dents, mais bien la distance du centre au point de contact de la dent avec celle de la roue qu'elle engrène (*).

Du cric.

197. Le *cric simple* se compose d'un pignon que l'on peut faire tourner sur son axe, au moyen d'une manivelle, et d'une crémaillère ou barre inflexible, dentée d'un côté, où engrène le pignon. La crémaillère est maintenue dans une coulisse qui ne lui permet de mouvement que dans le sens de sa longueur, et lorsque le pignon tourne sur son axe, il oblige la crémaillère à prendre ce mouvement. La puissance P est appliquée à l'extrémité du rayon r de la manivelle, et dirigée suivant la tangente à l'arc décrit par cette extrémité. La résis- Fig. 77.

(*) Dans la pratique, il convient que les dents aient d'assez faibles dimensions, eu égard au diamètre de la roue, ce qui augmente leur nombre à la circonférence. Lorsque les dents pèchent par excès de longueur, si elles sont trop rapprochées, elles se brisent; si elles sont trop écartées, l'engrenage ballotte. Or celui-ci doit être le plus juste possible pour le bon effet de la machine, sans toutefois que le désengrenage éprouve aucun obstacle. A cet effet, on taille les dents de manière que la section de chaque face soit une épicycloïde. Mais comme l'exécution n'est jamais parfaite, le frottement qui a encore lieu finit par déformer la dent, et l'engrenage devient défectueux. On approche de la perfection avec de très-petites dents que l'on fait à peu près rectangulaires, et qui prennent par l'usage la forme convenable.

tance R, qui s'oppose au mouvement de la crémaillère, peut être regardée comme une force perpendiculaire à l'extrémité du rayon ρ du pignon. On doit donc avoir (195) pour l'équilibre,

$$P:R::\rho:r,$$

ce qui s'énonce : *La puissance est à la résistance comme le rayon du pignon est au rayon de la manivelle.*

198. L'effet du cric simple dépendant aussi de la petitesse du rayon du pignon, par rapport à celui de la manivelle, et ce rapport se trouvant renfermé dans d'étroites limites par la nature même de la machine, on a cherché à augmenter son pouvoir, sans allonger le rayon de la manivelle, et sans diminuer celui du pignon. Or, on obtient un très-bon résultat, en disposant une ou
Fig. 78. plusieurs roues dentées entre le pignon C de la manivelle et la crémaillère AB, comme on le voit représenté sur la figure 78. Dans cet appareil, qui prend le nom de *cric composé*, la puissance P transmet son action à la dernière roue, dont le pignon G engrène avec la crémaillère.

La condition d'équilibre est alors, comme pour un système de roues dentées,

La puissance est à la résistance comme le produit des rayons des pignons est au produit des rayons des roues par le rayon de la manivelle.

Du plan incliné.

199. Nous avons démontré (121) que, pour l'équilibre d'un corps sollicité par des forces quelconques, et s'appuyant contre un plan fixe par plusieurs points, il faut et il suffit que ces forces se réduisent à une seule normale au plan, et le rencontrant en un point situé dans l'intérieur du polygone déterminé par les points

d'appui. Nous allons maintenant examiner comment ces conditions générales se modifient dans le cas d'un corps pesant, retenu par une seule force sur un plan incliné à l'horizon, d'où est venu le nom de la machine.

Soient R le poids du corps ou la résistance à vaincre pour l'empêcher de glisser le long du plan incliné IKL, et P la puissance ou la force qui le retient sur ce plan. Il faut, pour l'équilibre, que les deux forces P, R, aient une résultante N, qui soit normale au plan, et le rencontre en un point de la surface de contact du corps et du plan. Ainsi d'abord les directions des deux forces, qui sont l'une OP, l'autre la verticale OR passant par le centre de gravité G du corps, se couperont en un point O, et seront situées dans un plan POR perpendiculaire au plan IKL, puisqu'il passe par la normale ON. De plus, ce même plan POR, passant par la verticale OR, sera perpendiculaire à tout plan horizontal IKH coupant le plan IKL suivant IK, et, par conséquent, sera perpendiculaire à IK. Donc les intersections AB, AC, des plans IKL, IKH, par le plan POR, seront elles-mêmes perpendiculaires à IK, et comprendront un angle BAC précisément égal à l'angle que le plan incliné IKL fait avec le plan horizontal IKH. Fig. 79.

Pour plus de simplicité, représentons le plan IKH par l'horizontale AC, le plan incliné par l'oblique AB, et de l'un de ses points, tel que B, menons sur AC la perpendiculaire BC. Nous aurons alors un triangle rectangle BAC, dont l'hypoténuse AB et les côtés AC, BC, seront ce qu'on nomme respectivement la *longueur*, la *base* et la *hauteur* du plan incliné. Fig. 80.

Cela posé, le théorème établi plus haut (182) donne immédiatement les rapports qui existent, dans l'état d'équilibre, entre les forces P, R, et la pression N exercée sur le plan incliné. Car si, à une distance quelcon-

que du point A, on mène sur OP la perpendiculaire DE, qui rencontre AC en D, et AB en E, on formera un triangle auxiliaire ADE, dont les côtés seront respectivement perpendiculaires aux directions des trois forces P, R, N, et, d'après le théorème cité, on aura

(1) P:R::DE:AD, P:N::DE:AE (2).

200. Examinons maintenant les deux cas particuliers suivants :

1[er] CAS. — *La direction de la puissance parallèle au plan incliné.*

Fig. 81. Le triangle auxiliaire ADE, devenant rectangle en E, est alors semblable au triangle rectangle ABC, qui a le même angle aigu A; on a donc DE:AD::BC:AB, et la proportion (1) devient

P:R::BC:AB.

Donc, *lorsque la direction de la puissance est parallèle au plan incliné, sa grandeur est au poids du corps qu'elle y retient en équilibre, comme la hauteur du plan est à sa longueur.*

On a aussi DE:AE::BC:AC, et la proportion (2) devient P:N::BC:AC.

2[e] CAS. — *La direction de la puissance horizontale.*

Fig. 82. Les trois côtés du plan incliné BAC étant alors perpendiculaires aux directions des forces P, R, N, le triangle auxiliaire devient inutile, et l'on a immédiatement

P:R::BC:AC.

Donc, *lorsque la direction de la puissance est horizontale, sa grandeur est au poids du corps qu'elle retient en équilibre sur le plan incliné, comme la hauteur du plan est à sa base.*

On a aussi P:N::BC:AB.

On voit que, dans ces deux cas, la puissance est représentée par la hauteur du plan incliné, et la résistance par sa base, de sorte que ces cas admettent en commun la loi suivante :

La puissance est à la résistance comme le côté du plan incliné parallèle à la résistance est au côté parallèle à la puissance.

201. Le *plan incliné* s'emploie journellement pour soulever les corps pesants. La proportion P : R : : BC : AB (200, 1[er] cas) montre que plus la longueur AB du plan sera grande par rapport à sa hauteur BC, moins il faudra d'effort pour soulever un poids donné. Ordinairement on prend la hauteur égale au quart ou au cinquième de la longueur. C'est l'inclinaison que les portefaix donnent au plan formé par deux rouleaux parallèles dont ils se servent pour charger un fardeau sur leur camion. Alors ils n'ont besoin que de faire un effort égal au quart ou au cnquième du poids du fardeau. Mais ils diminuent encore l'effort à exercer en embrassant le corps avec une corde attachée par une extrémité au sommet B du plan Fig. 83.
incliné, et agissant à l'autre extrémité dans une direction parallèle au plan, de sorte que les deux parties BD, PE de la corde soient parallèles. Or, on a vu (181) que dans l'état d'équilibre, la puissance P égale la tension du cordon BD, et par conséquent la moitié de leur résultante P'. On aura donc

$$P' \text{ ou } 2P : R :: BC : AB, \text{ ou } P : \frac{1}{2} R :: BC : AB.$$

Comparant cette proportion à la précédente, on voit que la force capable de faire équilibre au poids R, lorsqu'on se sert de la corde, n'est que la moitié de celle qu'il faudrait employer si l'on n'en faisait pas usage.

202. Les rapports donnés (199) par nos proportions (1) et (2) pour les forces P, R, N, sont plus simples que

ceux des sinus employés par les auteurs. Il est au reste facile de passer des uns aux autres; car les sinus des angles d'un triangle étant comme les côtés opposés, le
Fig. 80. triangle ADE donne les proportions

$$\text{DE} : \text{AD} :: \sin \text{A} : \sin \text{E}, \text{DE} : \text{AE} :: \sin \text{A}' : \sin \text{D}.$$

Or l'angle E ou AED est égal à l'angle PON dont les côtés sont respectivement perpendiculaires aux siens. Par la même raison l'angle D ou EDA est supplémentaire de l'angle POR qui a l'ouverture tournée en sens contraire. Mais l'angle POR = PON + NOR = PON + BAC, puisque les angles NOR, BAC, ayant les côtés perpendiculaires chacun à chacun, sont égaux; donc, si l'on désigne par α l'angle BAC du plan incliné, et par β l'angle PON que la direction de la puissance fait avec la normale ON, les proportions (1) et (2) deviendront

$$\text{P} : \text{R} :: \sin \alpha : \sin \beta, \qquad \text{P} : \text{N} :: \sin \alpha : \sin (\alpha + \beta).$$

De plus, si l'on appelle γ l'angle formé par la direction de la puissance P avec la longueur AB du plan incliné, on aura $\sin \beta = \cos \gamma$, et la première des deux proportions précédentes donnera $\text{P} : \text{R} :: \sin \alpha : \cos \gamma$.

Ainsi, *dans l'état d'équilibre, la puissance est à la résistance comme le sinus de l'angle que le plan incliné fait avec l'horizon, est au cosinus de l'angle formé par la puissance et le plan incliné.*

Comme l'angle α est constant pour chaque plan incliné, lorsque la puissance P est donnée en grandeur, sa direction se détermine par la première proportion, d'où l'on tire $\sin \beta = \frac{\text{R} \sin \alpha}{\text{P}}$. Mais comme à un même sinus répondent deux angles supplémentaires, l'un aigu, l'autre obtus, on voit que la puissance P pourra, en général, être appliquée dans deux directions différentes. Nous disons, en général, parce que la résultante des

deux forces P, R, devant agir suivant une normale au plan incliné, et presser le corps contre ce plan, il est clair que, pour remplir cette condition, la puissance doit être dirigée dans l'intérieur de l'angle NOR′ supplément de NOR. Par conséquent, l'angle NOP ou 6 doit être plus petit que l'angle NOR′ ou $200°—\alpha$. La puissance P n'admettra donc la direction OP′, correspondante à l'angle obtus, que si l'on a $\sin 6 > \sin 200°—\alpha$, ou $\sin 6 > \sin \alpha$, et, par suite, $P < R$.

D'un autre côté, si l'on avait $P < R \sin \alpha$, il en résulterait $\sin 6 > 1$. Or, la plus grande valeur du sinus étant l'unité qui répond à l'angle droit, l'équilibre serait donc alors impossible.

Ainsi, pour que la puissance puisse être appliquée dans deux directions différentes, il faut que son intensité P satisfasse aux deux inégalités

$$P < R, \quad P > R \sin \alpha.$$

Lorsque l'on a $P = \sin \alpha$, ce qui est pour la puissance son *minimum* d'intensité, elle ne peut recevoir qu'une direction. Mais comme alors $\sin 6 = 1$, l'angle 6 est droit; cette direction est donc parallèle au plan incliné, ce qui est le cas le plus favorable pour la puissance (200, 1[er] cas).

203. La loi d'équilibre, dans ce cas, ou la formule $P = R \sin \alpha$, montre qu'un corps de poids R ne tend à glisser le long d'un plan incliné sous un angle α, qu'en vertu de son poids diminué dans le rapport de la hauteur à la longueur du plan; le poids ainsi réduit à P ou $R \sin \alpha$, est ce qu'on nomme le *poids relatif* du corps par opposition au *poids absolu* R, qui a lieu suivant la verticale.

Lorsque l'angle α du plan incliné va en augmentant depuis 0° jusqu'à 100°, la valeur du poids relatif croît d'une

manière continue depuis zéro qui répond au plan horizontal, où le corps reste en effet en repos, jusqu'à la valeur R qui répond au plan vertical, où le poids relatif se confond avec le poids absolu. Lorsque l'angle α est le tiers d'un angle droit, comme alors $\sin\alpha = \frac{1}{2}$, on a $P = \frac{R}{2}$, ou le poids relatif égal à la moitié du poids absolu.

204. Si l'on adosse l'un contre l'autre deux plans de
Fig. 84. même hauteur BC, mais inclinés à l'horizon sous les angles différents α, α', et qu'on y appuie deux corps de poids absolus R, R', réunis par un cordon passant sur une poulie fixée en B, de telle sorte que les deux parties du cordon tendu soient respectivement parallèles à leurs plans, les poids relatifs de ces corps seront $R \sin\alpha$, $R' \sin\alpha'$. On aura donc, dans l'état d'équilibre,

$$R \sin\alpha = R' \sin\alpha';$$

d'où $R : R' :: \sin\alpha' : \sin\alpha$. Or le triangle ABA' donnant $\sin\alpha' : \sin\alpha :: AB : A'B$, la proportion précédente devient $R : R' :: AB : A'B$.

Ainsi, *pour que les deux corps se fassent équilibre, il faut que leurs poids ou simplement leurs masses soient proportionnelles aux longueurs des plans où ils s'appuient.*

Des systèmes de plans inclinés.

205. Pour trouver les conditions d'équilibre d'un corps pesant qui s'appuie à la fois sur plusieurs plans inclinés, on regardera son poids comme une force verticale passant par son centre de gravité; alors il n'y aura plus qu'à suivre la marche générale indiquée plus haut (126).

Prenons pour exemple le cas particulier d'un corps soumis à la seule action de la pesanteur, et s'appuyant
Fig. 85. sur deux plans inclinés BH, B'H par les deux points C, C'; pour qu'il y ait équilibre, il faut que le poids R du

corps puisse se décomposer en deux forces qui soient respectivement normales aux plans BH, B'H, et les rencontrent aux points de contact C, C'. Par conséquent, les deux normales CO, C'O', menées aux plans BH, B'H, par les points C, C', devront 1° se rencontrer en un point O de la verticale GR passant par le centre de gravité G du corps; 2° se trouver toutes deux avec la direction GR dans un même plan vertical COC'. Telles sont, dans ce cas, les conditions d'équilibre.

Le plan vertical COC', étant à la fois perpendiculaire aux deux plans inclinés, le sera donc à leur intersection commune; et, par conséquent, celle-ci doit être horizontale. Donc il est impossible qu'un corps pesant soit en équilibre sur deux plans inclinés, si leur intersection n'est pas horizontale.

Quant aux pressions exercées sur chacun des plans inclinés, comme elles ne sont autres que les deux composantes du poids normales aux plans, il suffit, pour les déterminer, de prendre sur la direction OR une longueur OD pour représenter l'intensité de la force R, et de construire un parallélogramme dont les côtés OE, OE', adjacents au sommet O, soient perpendiculaires aux plans BH, B'H. Les forces représentées par les côtés OE, OE' seront les pressions cherchées.

Du coin.

206. Le *coin* est un corps solide en forme de prisme triangulaire AF, qu'on introduit par l'une des arêtes EF Fig. 86
entre deux obstacles qu'on veut écarter. L'arête EF s'appelle le *tranchant* du coin. La face opposée ABCD, sur laquelle on applique la puissance ou le choc, se nomme la *tête* du coin, et les deux faces adjacentes ADFE, BCFE, qui agissent contre les deux obstacles, en sont les *côtés*.

Quelle que soit la direction du choc ou de la puissance, on peut toujours concevoir cette force décomposée en deux autres, l'une perpendiculaire, l'autre parallèle à la tête du coin. La première exerce sur lui tout son effet, mais la seconde ne peut lui imprimer aucun mouvement, car elle ne tend qu'à faire glisser le marteau sur la tête ABCD.

Fig. 87. Supposons donc immédiatement la puissance P normale à la tête du coin, et représentons par R, R′ les deux résistances qui en résultent perpendiculairement à ses deux côtés pressés par des obstacles. Il s'agit de déterminer les conditions d'équilibre entre les trois forces P, R, R′.

A cet effet, si par la direction de la puissance P on mène un plan perpendiculaire aux arêtes parallèles AD, BC, EF, il coupera la surface du prisme suivant un triangle GHI, dont les côtés GH, GI, HI seront les hauteurs des trois faces AC, AF, BF, qui d'ailleurs ont des bases égales. Donc les côtés du triangle seront proportionnels à ces trois faces, c'est-à-dire, à la tête et aux côtés du coin, et pourront les représenter. Comme de plus les angles du triangle mesurent les dièdres correspondants du coin, les trois forces P, R, R′ seront respectivement perpendiculaires aux trois côtés du même triangle; de sorte qu'on aura (182) pour les conditions d'équilibre

$$P : R : R' :: GH : GI : HI,$$

c'est-à-dire que *l'intensité de la puissance est aux pressions normales aux côtés du coin, comme la surface de la tête est aux surfaces des côtés.*

207. Lorsque les côtés GI, HI sont égaux, chacun d'eux se nomme la *longueur* du coin, qu'on dit alors isoscèle. Dans ce cas $R = R'$, et la condition d'équilibre devient

La puissance est à l'une des pressions latérales comme la tête du coin est au côté.

Par conséquent, l'effort exercé par le coin soumis à une puissance déterminée, est d'autant plus grand, que la tête est plus petite par rapport à la longueur.

De la vis.

208. La *vis* est une machine qu'on emploie pour élever des corps pesants, et surtout pour exercer de grandes pressions. Elle consiste en un cylindre droit, à la surface duquel adhère un *filet* saillant roulé en spirale. Le filet peut être considéré comme engendré par le mouvement d'un triangle, d'un parallélogramme, ou, en général, d'un polygone, qui, s'appuyant par l'un de ses côtés sur une génératrice, tourne autour de l'axe du cylindre sans cesser d'être avec lui dans un même plan, et en parcourant une courbe nommée *hélice*, tracée sur la surface du cylindre. Il s'agit de faire connaître d'abord la génération de cette courbe, et ses propriétés.

A cet effet, concevons un cylindre droit ABCD; développons la circonférence BAB'B de la base, à partir d'un de ses points B, et dans son propre plan, suivant la droite BE. Par le point E menons au plan de la base une perpendiculaire déterminée EG, et joignons BG. Si l'on enroule le triangle rectangle BEG autour du cylindre, de manière que la base BE de l'un revienne se confondre avec la base BAB'B de l'autre, l'hypoténuse BG s'appliquera sur la surface du cylindre suivant une courbe BH'H, telle que la hauteur B'H' d'un quelconque de ses points H', comparée à la portion BAB' de la base, comprise entre le point B de départ et le pied B' de la perpendiculaire H'B', donnera toujours le même rapport; car le point H' de la courbe provient du point G' situé sur l'hypoténuse Fig. 87

BG, à une hauteur G'E' = H'B'. Or l'on a

GE : G'E' : : BE : BE' : : *circ.* BAB'B : *arc* BAB'.

Donc, puisque les hauteurs GE, G'E' égalent respectivement BH, B'H', on aura

BH : B'H' : : *circ.* BAB'B : *arc* BAB' ;

et il en sera de même pour tous les points de la courbe ainsi formée par l'enroulement de l'hypoténuse BG prolongée indéfiniment. La courbe continue, qui contourne la surface du cylindre en montant proportionnellement à l'arc parcouru par le pied de la perpendiculaire, est précisément ce qu'on nomme *hélice* (*). Chacune des portions de l'hélice, dont les deux extrémités B, H, viennent aboutir à la même génératrice BH du cylindre, forme une *spire*. L'intervalle H'H'', compris entre deux spires consécutives, et mesuré sur une même génératrice, est partout le même, et se nomme le *pas* ou la *hauteur* de l'hélice.

Si donc on désigne, en général, par $2\pi r$ la circonfé-

(*) Les auteurs expliquent la génération de l'hélice en développant le cylindre AL sur un plan, suivant le rectangle
g. 88. AA'D'D, qu'on divise en rectangles partiels égaux par les transversales BB', CC',... Enroulant alors ces rectangles partiels autour du cylindre, la diagonale AB' du premier détermine la première spire, la diagonale BC' du second la seconde spire, ainsi de suite. Toutes ces spires sont dans le prolongement l'une de l'autre, et forment une courbe continue, quoique obtenue par des portions séparées de ligne droite. Mais comme les élèves peuvent éprouver quelque difficulté à concevoir pourquoi les différentes parties de l'hélice ne font pas de *genoux*, il nous a paru préférable de remplacer les rectangles partiels par un seul triangle revenant au même et faisant bien mieux saisir la continuité de l'hélice.

rence de la base, par h la hauteur BH de l'hélice, par y la hauteur H'B' d'un de ses points, et par x l'arc BAB' correspondant, on aura

$$\frac{y}{x}=\frac{h}{2\pi r}$$

qui est l'équation de l'hélice; elle donnera tous ses points en faisant varier x depuis o jusqu'à un nombre de circonférences égal au nombre des spires, et portant sur les génératrices, à partir de la base, les valeurs obtenues pour y.

L'hélice étant ainsi formée par l'enroulement continu d'une seule et même droite, on voit que sa propriété caractéristique est d'être partout également inclinée sur le plan de la base, ou à l'horizon, lorsque son cylindre est vertical. Si donc on place un point m sur l'hélice, on pourra le considérer comme reposant sur la tangente en ce point, ou, ce qui revient au même, sur un plan incliné IKL, dont la hauteur KL est la hauteur h de l'hélice, et dont la base IK égale la circonférence de la section faite au point I ou $2\pi r$.

209. Supposons d'abord le point m reposant sur l'hélice et soumis à l'action de deux forces, l'une verticale q tendant à le faire descendre, l'autre horizontale p tangente au cylindre, et s'opposant au mouvement du point m le long de l'hélice. Si l'on considère ce point sur le développement IL de la spire ISC où il est situé, les forces p, q, resteront l'une horizontale, l'autre verticale; et pour que l'équilibre ait lieu, ces deux forces devront avoir une résultante r perpendiculaire à la longueur IL du plan incliné. Les trois forces p, q, r étant ainsi respectivement perpendiculaires aux trois côtés du triangle IKL, leur seront donc proportionnelles d'après le théorème établi plus haut (182), et l'on aura

$$p : q :: h : 2\pi r.$$

Ainsi, *lorsqu'il y a équilibre, la puissance horizontale* p *est à la force verticale* q, *pressant le point sur l'hélice, comme le pas de l'hélice est à la circonférence du cylindre.*

On n'a considéré que la spire où est situé le point m, car toute portion de l'hélice située en deçà ou au delà ne peut influer sur les conditions de l'équilibre.

210. Pour prendre un cas intermédiaire entre le cas précédent et celui de la vis, concevons que la puissance p', qui agit pour faire tourner le cylindre autour de son axe supposé fixe, soit appliquée, non plus au même point m que la force verticale q, mais en un certain point o relié d'une manière invariable avec la surface du cylindre, et nommons d sa distance à l'axe. Cela posé, menons par le point m une horizontale tangente au cylindre, suivant laquelle nous appliquerons d'un côté une force auxiliaire p retenant le point m de manière qu'il y ait équilibre entre les forces p, q, et de l'autre une force $-p$ égale et opposée à p. D'après le cas précédent, les forces p, q donnent $p : q :: h : 2\pi r$. Or, les forces $p', -p$, agissant exactement ici comme dans le tour, fournissent la même loi d'équilibre $p' : p :: r : d$. Multipliant ces deux proportions par ordre, et supprimant les facteurs communs, il vient

$$p' : q :: h : 2\pi d.$$

Donc, *la puissance horizontale* p' *est à la force verticale qui presse le point* m *sur l'hélice, comme le pas de l'hélice est à la circonférence que la puissance tend à décrire autour de l'axe du cylindre.*

Cette proportion, étant indépendante du rayon r du cylindre primitif, fournit donc toujours le même rapport entre les forces p' et q, quelle que soit la distance de l'hélice à l'axe, pourvu que son pas reste le même.

211. Maintenant il est facile de trouver les conditions d'équilibre pour la vis elle-même, comme nous allons le faire voir, après avoir complété l'explication de la machine. Il résulte de la définition établie ci-dessus (208), que tous les points, dont se compose le filet de la vis, peuvent être censés appartenir à des hélices tracées sur des cylindres, ayant pour axe celui du cylindre primitif, et pour rayons respectifs les perpendiculaires abaissées de ces points sur l'axe commun. D'ailleurs toutes ces hélices ont évidemment le même pas, qui se nomme le pas de la vis; car pour chacune d'elles l'intervalle compris entre deux révolutions consécutives est égal à la droite BH.

La vis, proprement dite, ne peut servir comme puissance mécanique, sans être jointe à une autre pièce appelée son *écrou*, et qui est un corps solide de forme quelconque, exactement pénétré par la vis elle-même : de sorte que le filet saillant, dont elle est revêtue, produit dans l'intérieur de l'écrou une espèce de creux ou sillon dont la surface est parfaitement égale à celle que la vis présente en relief, c'est-à-dire que l'écrou est comme le moule ou la matrice de la vis.

Ces deux pièces sont donc tellement assujetties l'une à l'autre, que si l'une d'elles est fixe, l'autre ne peut plus prendre qu'un mouvement combiné de rotation et de translation, par suite duquel elle tourne autour de l'axe commun en même temps qu'elle glisse sur la surface de la première pièce comme sur un plan incliné; de manière que, pour une révolution entière autour de l'axe, elle s'avance, dans le sens de cet axe, d'une longueur égale au pas de la vis.

212. Passons enfin aux conditions d'équilibre entre les forces appliquées à la pièce mobile, et qui sont ordinairement au nombre de deux, savoir, une résistance R

g. 89. parallèle à l'axe AB, et une puissance P agissant dans un plan perpendiculaire à l'axe. Comme les conditions d'équilibre restent les mêmes, quelle que soit la pièce mobile, nous supposerons que l'écrou tourne autour de la vis immobile et placée dans une position verticale.

Ainsi la résistance R, ou l'action de la pesanteur sur l'écrou chargé, si l'on veut, d'un poids étranger, agit parallèlement à l'axe pour le faire descendre en tournant autour de lui. La puissance P, qui s'oppose à ce mouvement, est une force horizontale CP appliquée en un point C lié à l'écrou d'une manière invariable. Représentons toujours par h le pas de la vis, et par r la distance CD de la force CP à l'axe.

Le cas actuel se ramènerait immédiatement au précédent (210), si l'écrou ne reposait que par un seul point sur le filet de la vis, et la condition d'équilibre serait donc

$$P : R :: h : 2\pi r.$$

Mais comme l'écrou porte à la fois sur une infinité de filets, si l'on conçoit la résistance R décomposée en autant de résistances parallèles r', r'', r''' qu'il y a de points de pression, et de même la puissance P décomposée en autant de puissances parallèles p', p'', p''',..... dont chacune soit séparément en équilibre avec la résistance partielle qui lui correspond, on aura toujours

$$\begin{array}{l} p' : r' :: h : 2\pi r \\ p'' : r'' :: h : 2\pi r \\ p''' : r''' :: h : 2\pi r \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

et par conséquent

$$p' + p'' + p''' + \ldots : r' + r'' + r''' + \ldots :: h : 2\pi r$$

ou enfin $$P : R :: h : 2\pi r.$$

Ainsi, *dans l'équilibre de la vis, la puissance, qui tend à faire tourner l'écrou, est à la résistance, qui agit dans le sens de l'axe, comme le pas de la vis est à la circonférence que la puissance tend à décrire.*

Il suit de là que, par rapport à la résistance, la puissance a d'autant plus d'effet que, 1° son bras de levier est plus grand; 2° le pas de la vis plus petit.

Lorsqu'on se sert de la vis pour exercer des pressions, ce qui est son usage le plus ordinaire, on dispose les objets à comprimer entre deux plateaux, dont l'un est fixe, et dont l'autre est pressé par l'écrou.

Pour donner un exemple numérique, cherchons le rapport qui existe entre la puissance et la résistance, lorsqu'on a $r = 1^m$, et $h = 0^m,01$. Dans ce cas, la proportion ci-dessus donne $P : R :: 1 : 200\pi :: 1 : 628$, puisque $\pi = 3,14159.....$ Par conséquent, avec une telle vis, on produirait une pression 628 fois plus considérable qu'avec la puissance donnée.

De la vis sans fin.

213. On peut encore employer la vis pour communiquer à une roue dentée un mouvement de rotation, ayant pour but d'élever un poids, ou de vaincre une résistance quelconque. A cet effet, on donne d'abord au pas de la vis une longueur à peu près égale aux divisions de la roue, et l'on dispose la machine de telle sorte que l'axe de la vis soit dans le plan de la roue, et que son filet engrène avec les dents. En faisant alors tourner la vis, à l'aide d'une manivelle ou de toute autre manière, son filet mène les dents successives de la roue, à laquelle il se présente toujours d'une manière uniforme, en exerçant une pression parallèle à l'axe. L'appareil ainsi disposé se nomme *vis sans fin*, parce que le mouvement Fig. 90.

de la roue et de la vis peut se continuer indéfiniment, tandis que la vis ordinaire ne peut faire qu'un nombre déterminé de tours.

Fig. 90. Il s'agit de trouver les conditions d'équilibre entre la puissance P appliquée à la manivelle, et la résistance R, qui est un poids suspendu à une corde s'enroulant sur le cylindre C de la roue dentée.

Soient h le pas de la vis, m le rayon de la manivelle, r celui de la roue, c celui du cylindre. Si l'on désigne par X la pression que le filet exerce, parallèlement à l'axe AB, contre la dent de la roue, on aura d'abord, par l'équilibre de la vis,

$$P : X :: h : 2\pi m,$$

et par l'équilibre du treuil, ou par celui de la roue dentée,

$$X : R :: c : r.$$

Multipliant ces deux proportions par ordre, il vient

$$P : R :: ch : 2\pi m . r.$$

Ainsi, *dans l'équilibre de la vis sans fin, la puissance est à la résistance, comme le produit du pas de vis par le rayon du treuil est au produit du rayon de la roue dentée par la circonférence que tend à décrire le point d'application de la puissance.*

Lorsque h et c sont de très-petites fractions de m et de r, le produit ch est extrêmement petit par rapport au produit $2\pi m . r$, et l'on obtient des effets surprenants.

Si, par exemple,

$$h = 0^m,01, \ m = 1^m,00, \ c = 0^m,05, \text{ et } r = 1^m,00,$$

on aura $P : R :: 5 : 20\,000\,\pi : : 1 : 12\,000$ environ. La machine construite avec ces dimensions rendrait donc la puissance 12 000 fois plus considérable, c'est-à-dire permettrait de soulever un poids de 12 000 kil. au moyen d'un effort équivalent à 1 kil.

Du genou.

214. Le *genou* est une machine formée de deux tringles rigides AB, BD, réunies par un mouvement de charnière en un point B, autour duquel elles peuvent tourner dans leur plan commun, comme les deux branches d'un compas autour de leur pivot. L'extrémité supérieure A de la tringle AB se relie, par un autre mouvement de charnière, au sommet d'un montant AC fixé sur un plateau MN, ce qui permet à cette tringle de tourner autour du point fixe A, tandis que l'extrémité inférieure D de la tringle BD glisse librement dans une rainure du montant AC, comme dans une coulisse. Fig. 91.

Concevons maintenant qu'une puissance P agisse sur la tringle AB pour rapprocher son extrémité B du montant, et, par conséquent, pour faire ouvrir l'angle B, il est clair que le point D va tendre à s'éloigner du point A en glissant dans la rainure AC, et pressant, contre le plateau MN, les corps soumis à son action. La puissance s'applique ordinairement non à la tringle AB, mais à un levier AL invariablement relié avec cette tringle, de manière que leur ensemble forme le levier coudé LAB, mobile autour du point fixe A; et l'on agit sur le bras AL pour produire en D une pression qui s'exerce le long de la rainure.

La résistance R étant une force égale et contraire à cette pression, et la puissance P agissant à l'extrémité du bras de levier AL, cherchons la relation qui existe entre ces deux forces lorsque l'équilibre a lieu, en supposant d'ailleurs la machine dans une position verticale. Fig. 92.
D'abord il est clair que la puissance P, qui agit sur le levier coudé LAB, développe suivant BD une certaine force qui pousse le point D contre la rainure. Or on

peut, sans troubler cet effet, appliquer au point B, suivant BD, deux forces X égales et contraires, la force X étant choisie de manière à faire équilibre à la puissance P. Abaissant alors du point A, sur la direction de BD, la perpendiculaire AI, on aura, par l'équilibre du levier coudé,

P : X : : AI : AL,

et il ne restera plus que la force X agissant pour éloigner le point D de la rainure. Décomposons cette force X en deux autres, l'une Y dirigée suivant l'horizontale DY, et qui sera détruite par la résistance du montant, l'autre agissant suivant la verticale AC. Cette seconde composante sera précisément la valeur de la résistance R opposée à la pression qui s'exerce pour faire descendre le point D le long de la rainure.

Les trois forces X, Y, R étant respectivement perpendiculaires aux côtés du triangle ACN, on aura (182) X : R : : AN : CN ; mais si l'on abaisse du point B la perpendiculaire BE sur AC, on formera un triangle DBE semblable au triangle ACN, d'où résulte la proportion AN : CN : : BD : DE ; et, par suite, la précédente deviendra X : R : : BD : DE, qui, multipliée par ordre avec la première, donnera enfin

(1) P : R : : AI . BD : AL . DE.

Comme le double de la surface du triangle ABD a également pour mesure AI.BD ou AD.BE, on peut remplacer la proportion (1) par la suivante

(2) P : R : : AD.BE : AL.DE.

Cette relation contient encore les variables DE, AD, BE ; mais au moins elles sont toutes comprises dans l'intérieur de la machine. D'ailleurs le résultat n'offre rien de remarquable. Or, si l'on suppose le genou isoscèle,

ou AB $=$ BD, d'où il résulte AE $=$ DE, et AD $=$ 2DE, la relation ci-dessus devient

$$P : R :: 2BE : AL.$$

Ainsi, en appelant BE la *flèche du genou*, on voit que *dans l'équilibre du genou isoscèle, la puissance qui tend à faire tourner le premier côté autour de son extrémité fixe, est à la résistance que l'extrémité mobile du second côté éprouve le long de la rainure, comme le double de la flèche du genou est au bras de levier de la puissance.*

Lorsque la flèche BE du genou est fort petite par rapport au bras de levier AL, la pression exercée, qui a pour valeur $R = \frac{P.AL}{2BE}$, sera très-considérable par rapport à la puissance, et deviendrait infinie, si les deux côtés du genou étaient en ligne droite. Ainsi la pression exercée par le genou, dans le sens de la rainure, peut devenir plus grande que toute pression donnée.

215. Remarque. La loi d'équilibre du genou peut s'obtenir plus simplement à l'aide des lignes trigonométriques.

En effet, nous avons vu (212) que la puissance P développe, suivant BD, une certaine force X qui pousse le point D dans le sens BD, et que, par la loi d'équilibre du levier, on doit avoir

$$P : X :: AI : AL,$$

ou
$$P : X :: AB. \sin B : AL,$$

puisque
$$AI = AB. \sin B.$$

Or le point D, ainsi poussé par la force X contre le plan DA, et tiré par la force R le long du même plan, doit être en équilibre de lui-même; on aurait donc par la théorie du plan incliné

$$X : R :: I : \cos D;$$

multipliant par ordre, il vient

$$P : R :: AB . \sin D : AL . \cos D.$$

Au reste, cette relation se déduit aisément de la proportion

$$(1) \quad P : R :: AI . BD : AL . DE;$$

car

$$AI = AB \sin B, \text{ et } DE = BD \cos D.$$

On a donc

$$P:R::AB.BD.\sin B : AL.BD.\cos D :: AB.\sin B : AL.\cos D.$$

On tire de là

$$R = \frac{P.AL.\cos D}{AB.\sin B}.$$

Comme l'angle D diminue à mesure que l'angle B augmente, on voit que cos D s'approche de l'unité, en même temps que sin B s'approche de zéro. Donc la force R du genou croît indéfiniment à mesure que l'angle B augmente, ou que les deux côtés du genou s'approchent d'être en ligne droite. La même formule montre encore que la pression est d'autant plus forte que le bras de levier AL est plus long, et que le premier côté AB est plus court. C'est pourquoi l'on doit appliquer la traverse KL le plus près possible de l'angle du genou. Cette machine très-simple est fort utile, parce qu'avec une force médiocre elle permet d'exercer une pression énorme, en n'exigeant qu'un très-petit déplacement. On s'en sert principalement pour appliquer les timbres sur le papier. On pourrait la rendre aussi puissante que la presse à vis, et l'employer pour frapper les monnaies.

De la balance de Roberval.

Fig. 93. 216. La *balance de Roberval*, représentée par la figure

93, n'est autre chose que l'assemblage de quatre règles AB, *ab*, A*a*, B*b*, deux à deux égales et parallèles, et mobiles autour des points de jonction A, B, *a*, *b*, comme sur des charnières. Les deux règles AB, *ab* sont, en outre, mobiles autour des points milieux M, *m*, fixés sur un support vertical formant le pied de la machine. Les deux autres règles opposées A*a*, B*b*, portent en deux points arbitraires C, D, et dans le plan du parallélogramme AB*ba*, deux tringles CE, DF, invariablement reliées avec elles sous un angle quelconque. On voit que cet appareil peut être considéré comme formé par la réunion de deux balances égales et parallèles, situées dans un même plan vertical, et mobiles en même temps autour de leurs appuis, tout en conservant leur parallélisme. Maintenant, si l'on applique aux tringles EC, DF, deux forces P, Q, parallèles et de même sens, dirigées dans le plan du parallélogramme AB*ba*, comme, par exemple, deux poids suspendus par des cordons, lorsque ces poids sont égaux, l'équilibre aura toujours lieu, quelles que soient les distances de ces deux forces aux points fixes M, *m*. Fig. 94.

Pour le démontrer, nous allons d'abord faire voir qu'on peut appliquer la force P au sommet adjacent A du parallélogramme AB*ba*, et la force Q au sommet B.

En effet, décomposons la force P ou EP en deux autres EG, EH, dirigées suivant les droites AE, E*a*; ces composantes pourront être transportées aux points A, *a*, en AG′, *a*H′, puisque leur point d'application E se trouve invariablement lié avec les points A, *a*, par la tringle EC. Or, les forces AG′, *a*H′ peuvent se décomposer, l'une, AG′, en deux forces AI, AK, dirigées suivant les côtés AB, A*a*, l'autre, *a*H′, en deux forces *a*N, *a*L, dirigées suivant les côtés *ab*, A*a*. La force primitive P se trouve donc ainsi remplacée par les quatre forces AI, *a*N, AK, *a*L,

dont les deux premières sont détruites par la résistance des points fixes M, *m*, où l'on peut les concevoir appliquées. Il ne reste donc plus que les deux dernières AK, *a*L, qui, étant de même sens, et agissant en des points A, *a*, liés entre eux d'une manière invariable, se réduisent à une seule force égale à leur somme, et appliquée au point A. Il est facile de voir que cette force est égale à P ou EP ; car, si par le point H on mène au côté AB la parallèle HO, on aura le triangle EOH égal au triangle *a*LH′, et le triangle HOP égal au triangle AIG′, ce qui donne EO = *a*L et OP = IG′ ou AK. Donc la force AK + *a*L = EO + OP ou la force P. Ainsi, quelle que soit la distance de la force P aux points fixes M, *m*, on peut l'appliquer au point A suivant la direction du côté A*a*.

On prouvera de même que la force Q peut être appliquée au point B suivant la direction du côté B*b*.

Nous avons donc deux forces parallèles et de même sens P, Q, appliquées aux extrémités d'un levier AB dont les bras sont égaux ; et par conséquent il faut, pour l'équilibre, que les deux forces soient égales (*).

Lorsque les points d'appui M, *m*, ne sont pas au milieu des côtés AB, *ab*, mais les divisent tous deux dans un même rapport quelconque, on a de même, par la loi du levier,

P : Q : : CB : MA.

Donc, *dans la balance de Roberval, pour que deux forces parallèles, appliquées à des distances quelconques des*

(*) La démonstration que nous venons de donner se simplifie à l'aide de la théorie des couples. Mais comme c'est à peu près la seule machine, au moins de celles que l'on considère en Statique, pour laquelle cette théorie offre une simplification, nous avons préféré employer la décomposition des forces.

points fixes, se fassent équilibre, il faut et il suffit que ces forces soient en raison inverse des distances des points fixes aux deux côtés du parallélogramme qui leur correspondent.

217. De là résulte une espèce de paradoxe, puisque, dans le levier ordinaire, deux forces ne peuvent se faire équilibre, à moins d'être en raison inverse de leurs distances au point fixe, et par conséquent à moins d'être à la même distance de ce point, lorsqu'elles sont égales. Mais le paradoxe s'évanouit aussitôt, en faisant attention que la balance de Roberval n'est pas un véritable levier, c'est-à-dire, une verge *inflexible* mobile autour d'un *seul point fixe*. C'est au contraire un système de forme *variable*, où il y a *deux points* fixes, et qui peut donc comporter d'autres conditions d'équilibre que le levier ordinaire.

De la balance de Quintenz.

218. La *balance de Quintenz*, généralement connue sous le nom de *balance à bascule*, a été inventée par le chanoine Quintenz, de Strasbourg, qui prit un brevet d'invention en 1823. Aujourd'hui MM. Schwilgué et Rollé, après lui avoir apporté quelques perfectionnements de détails, la fabriquent en grand dans les beaux ateliers qu'ils ont créés dans la même ville. Fig. 95.

Cette ingénieuse balance se compose principalement d'un plateau fixe MN, ou espèce de caisse en forme de trapèze reposant sur le sol, et surmontée d'un plateau mobile KL sur lequel on met l'objet à peser; d'un montant vertical MO, fixé à l'extrémité M du plateau MN, et surmonté d'un levier AC à bras inégaux, mobile autour du point O; enfin de deux leviers coudés DEF, DEF, situés dans l'intérieur de la caisse fixe, et com- Fig. 96.

prenant un espace à peu près triangulaire, mobile autour de l'axe FF, base du triangle. Les deux leviers réunis au sommet, et ne formant plutôt qu'un seul levier à deux branches, reposent par deux couteaux F sur le plateau fixe MN, et supportent le plateau mobile KL au moyen de deux autres couteaux placés en-dessus aux deux points E. Ce plateau se relie au levier principal AOC par le moyen d'une tringle KB assemblée à charnière au point K du plateau, et au point B du levier. Il est percé en G pour le passage d'une autre tringle DC également assemblée à charnière, d'un côté avec la tête D du levier à deux branches, et de l'autre côté avec l'une des extrémités C du levier principal AOC, dont l'autre extrémité A porte un bassin destiné à recevoir le poids P. On voit que la position du plateau mobile KL est complétement déterminée au moyen du point de suspension K, et des deux points qui reposent sur les couteaux E(*).

L'appareil est disposé de telle sorte que les tringles Fig. 96. KB, DC, restent toujours verticales pendant les mouvements de la bascule, et que le corps à peser, mis en un point quelconque du plateau mobile, produit le même effet que s'il était immédiatement suspendu au point B du levier principal; c'est-à-dire que s'il faut mettre en A un poids P pour faire équilibre au corps R suspendu

---

(*) Dans la figure 96 on a supposé, pour plus de simplicité, le plateau mobile KL prolongé jusqu'à la tringle KB passant par le point B du levier AC; mais en réalité ce plateau se termine au panneau K'H (fig. 95), et la tringle dont il s'agit se relie à la tête K du trapèze avec lequel le plateau mobile KL est invariablement assemblé. Les lettres de la figure 96 ont été répétées, autant que possible, sur la figure 95 qui représente l'ensemble de la machine, tandis que la figure 96 sert seulement pour l'explication de la théorie.

en B, le même poids fera équilibre au corps R placé en un point quelconque du plateau mobile KL.

M. Quintenz a obtenu très-habilement ce résultat en imaginant de prendre les deux longueurs FE, FD, dans le même rapport que les deux longueurs OB, OC, ce qui donne la proportion OB : OC : : FE : FD. En effet, le poids R étant placé quelque part en r sur le plateau mobile, concevons-le décomposé en deux autres poids quelconques S, T, appliqués en des points s, t, situés au-dessus des leviers coudés, et à même distance de leurs extrémités F. Considérons séparément chacune de ces forces, comme si elle était seule, et prenons d'abord la force S. Si on la décompose en deux autres S′, S″, agissant aux points E, K, et qu'on représente par m, n, les distances de leurs points d'application à celui de la force S, considéré comme point fixe, la loi du levier donnera, dans l'état d'équilibre,

$$S' : S :: n : m+n, \quad S'' : S :: m : m+n,$$

d'où $S' = \dfrac{nS}{m+n}$, $S'' = \dfrac{mS}{m+n}$, et la force verticale S″, agissant au point K, pourra être considérée comme appliquée au point B situé sur sa direction.

Maintenant, si l'on décompose de même la force S′ en deux autres S_1, S_2, appliquées aux points D, F, la force S_2 sera détruite par la résistance du point fixe F, et l'on aura, pour déterminer la force S, la proportion

$$S_1 : S' :: FE : FD,$$

d'où $S_1 = \dfrac{S'.FE}{FD}$, ou, en substituant à S′ la valeur ci-dessus, $S_1 = \dfrac{nS.FE}{(m+n).FD}$.

Cette force S_1 pouvant être considérée comme appliquée au point C situé sur sa direction, le levier AC se trouve donc soumis à l'action de trois forces verticales, l'une P

appliquée au point A, et devant faire équilibre aux deux autres S'', S_1, appliquées aux points B, C. Ainsi, en prenant les moments, on aura, pour la condition d'équilibre, la relation

$$P'.AO = S''.OB + S_1.OC,$$

qui, par la substitution des valeurs de S'' et S_1, devient

$$P'.AO = \frac{mS.OB}{m+n} + \frac{nS.FE.OC}{(m+n).FD} = \frac{mS.FD.OB + nS.FE.OC}{(m+n).FD}.$$

Mais la proportion ci-dessus, OB : OC : : FE : FD, donne $FE.OC = FD.OB$; substituant cette valeur de FE.OC, les distances m et n, relatives à la position particulière du poids sur le plateau mobile, s'évanouissent, et l'on a $P'.AO = S.OB$, c'est-à-dire que les conditions d'équilibre sont les mêmes que si le poids S était suspendu au point B.

Comme tout ce qui précède peut s'appliquer mot pour mot à la partie T du poids R située en t au-dessus de l'autre branche du levier, on en conclut, en réunissant les deux résultats, $P.AO = R.OB$; d'où il suit que les conditions d'équilibre du poids R, reposant en un point quelconque du plateau mobile, sont les mêmes que s'il était appliqué au point B du levier AC.

219. Cette balance pèse ordinairemennt au 10[e], c'est-à-dire qu'un poids de 100 k., placé sur le plateau mobile, est tenu en équilibre par un poids de 10 k. suspendu au point A du levier principal. Alors la distance $OB = \frac{1}{10} OA$.

L'appareil est d'une grande sensibilité, parce que toutes les pressions s'exercent sur des couteaux prismatiques où les poids se trouvent répartis, de manière que chacun n'en porte qu'une portion. Le couteau du levier principal ne porte que 11, lorsqu'il aurait 20 à porter dans la balance ordinaire. La machine est d'un usage

aussi simple, mais elle est bien moins embarrassante à disposer; elle est d'ailleurs exempte de tout frottement, très-peu susceptible d'altération ou de dérangement, peu volumineuse, d'un transport facile, d'une grande solidité, et offre une facilité remarquable pour le travail des pesées. Enfin la délicatesse de son exécution permet de la faire servir à de petites pesées, en plaçant les corps sur le bassin des poids, et les poids sur le plateau mobile. Aussi tous les services publics, civils et militaires, ont exclusivement adopté cette balance, qui coûte de 120 à 150 fr., selon les dimensions.

Du polygone funiculaire.

220. On nomme *polygone funiculaire* un assemblage de cordes liées entre elles par des nœuds fixes, ou simplement passées dans des anneaux qui peuvent couler le long des cordes.

Considérons d'abord le premier cas, et supposons que chaque nœud n'assemble jamais que trois cordons. Ces nœuds fixes A, B, C, D... sont les sommets du polygone, dont les côtés AB, BC... sont formés par des cordons censés parfaitement flexibles et inextensibles, et d'ailleurs regardés comme sans pesanteur. Lorsque le polygone est tenu en équilibre par des forces quelconques P, P′, P″,... Q, appliquées à ses sommets, quelles que soient leurs directions et leurs intensités, les côtés du polygone sont rectilignes, et conservent une longueur invariable; mais la grandeur de ses angles doit évidemment varier selon les forces appliquées. Le polygone funiculaire est donc essentiellement un système de figure variable d'après des conditions déterminées, et, par conséquent, peut être assimilé à un assemblage de machines simples réagissant les unes sur les autres, en vertu de leur liaison mutuelle. Or, dans ces sortes d'assemblages, Fig. 97.

qu'on nomme spécialement *machines composées*, la théorie des lois d'équilibre repose sur les deux propositions suivantes, assez évidentes par elles-mêmes pour être regardées comme des axiomes.

1° *Lorsqu'un système de points est en équilibre, chaque point doit être en équilibre de lui-même en vertu de toutes les actions qui le sollicitent, et qui comprennent non-seulement les forces immédiatement appliquées à ce point, mais encore les résistances ou réactions exercées sur lui par les autres points du système.*

2° *Deux points ne peuvent agir l'un sur l'autre que suivant la droite qui les joint, et la réaction est toujours égale et contraire à l'action.*

Ainsi, pour déterminer les conditions d'équilibre du polygone funiculaire, nous aurons d'abord à évaluer les réactions provenant de la liaison des points du système au moyen des cordons, et, combinant ces réactions avec les forces immédiatement appliquées, nous exprimerons les conditions d'équilibre, comme si chaque sommet du polygone était entièrement libre dans l'espace. Nous déterminerons en même temps la figure du polygone qui convient à cet état.

Fig. 98. 221. Considérons d'abord trois forces P, Q, R, agissant suivant trois cordons AP, AQ, AR, réunis au point A par un nœud fixe. Comme chaque cordon est parfaitement flexible et inextensible, la force, qui agit suivant la direction rectiligne de l'un d'eux, transmet son action, de proche en proche, à chacun de ses points, comme si le cordon était une droite parfaitement rigide; on peut donc regarder les trois forces comme immédiatement appliquées au point A, et agissant, en outre, suivant les axes de leurs cordons (*).

(*) Cette supposition est d'autant plus permise, que si un

L'équilibre de ces forces exige que l'une d'entre elles soit égale et directement opposée à la résultante des deux autres. Donc

1° Les axes des trois cordons doivent être dans un même plan;

2° Les intensités des forces doivent (21) satisfaire aux proportions

$$P : Q : R :: \sin QAR : \sin PAR : \sin PAQ,$$

c'est-à-dire que *dans l'état d'équilibre chaque force peut être représentée par le sinus de l'angle formé par la direction des deux autres.*

222. Si les cordons AP, AQ, au lieu d'être soumis à l'action des forces P, Q, sont attachés par leurs extrémités à des points fixes F, F′, les efforts que ces points ont à supporter en vertu de la force R, ou les tensions des deux cordons, ont pour valeurs les intensités des forces P, Q, déterminées par les proportions ci-dessus, savoir :

$$P = \frac{R.\sin QAR}{\sin PAQ}, \quad Q = \frac{R.\sin PAR}{\sin QAR}.$$

Ces expressions montrent que les tensions des cordons AP, AQ sont d'autant plus grandes que l'angle PAQ, formé par leurs directions, est plus obtus; et, lorsque cet angle est égal à deux angles droits, c'est-à-dire lorsque les deux cordons sont en ligne droite, leurs tensions deviennent infinies.

Donc une corde parfaitement inextensible, tendue en ligne droite à ses deux extrémités, peut être rompue par l'application de la plus petite force latérale, à moins

---

cordon a tous ses fils également tendus, la résultante de toutes ces tensions passe nécessairement par l'axe.

qu'elle ne soit douée d'une résistance infinie dans le sens de sa longueur.

Il suit encore de là qu'une corde pesante ne peut être tendue en ligne droite dans une direction différente de la verticale; car alors son propre poids, qui n'est autre chose qu'une force verticale appliquée à son centre de gravité, exercerait des pressions infinies sur les deux points d'attache non situés sur la même verticale.

223. Lorsque le point A, où sont réunis les trois cordons soumis aux forces P, Q, R, peut glisser, comme un anneau, le long du cordon PAQ, au lieu d'être un nœud fixe, alors les conditions d'équilibre établies ci-dessus (221) deviennent insuffisantes. Il faut, en outre, que la direction RA de la force R divise l'angle PAQ en deux parties égales.

En effet, on ne détruit pas l'équilibre du système, lorsqu'il existe, en fixant d'une manière invariable deux points F, F', pris à volonté sur les cordons AP, AQ. Dès lors on peut considérer le point A comme assujetti à se mouvoir sur une ellipse dont F, F' sont les foyers, et AF, AF' les rayons vecteurs. Or (127) le point A, sollicité par la force R, ne peut être en équilibre sur cette courbe, à moins que la direction RA de la force ne lui soit normale en ce point; et par conséquent cette direction doit diviser en deux parties égales l'angle PAQ formé par les rayons vecteurs.

La proportion $P : Q :: \sin QAR : \sin PAR$, donnant alors $P = Q$, on voit que les deux parties de la corde, le long de laquelle l'anneau peut glisser, ont des tensions égales.

En outre, si l'on désigne l'angle PAQ par α, comme l'angle $PAR = QAR = 200° - \frac{1}{2}\alpha$, et qu'on a, en gé-

néral, $\sin \alpha = 2 \sin \frac{1}{2}\alpha \cos \frac{1}{2}\alpha$, la proportion

$$P : R :: \sin PAR : \sin PAQ$$

donnera

$$R = 2P \cos \frac{1}{2}\alpha.$$

224. Si le point A est un anneau fixe, dans lequel passe une corde PAQ tirée par les deux forces P, Q, on aura, dans l'état d'équilibre $P = Q$. En outre, ces deux forces exerceront sur l'anneau fixe une pression R, dont la direction divisera en deux parties égales l'angle PAQ ou α, et dont l'intensité sera $2P \cos \frac{1}{2}\alpha$, c'est-à-dire, la tension de la corde, multipliée par le double du cosinus de la moitié de l'angle formé par les deux parties de la corde.

225. Passons maintenant au cas général, et prenons une corde d'une longueur quelconque, dont α et β sont les extrémités. Attachons, par des nœuds fixes, à plusieurs de ses points A, B, C, D, etc., des cordons suivant lesquels agissent des forces extérieures P', P'', P'''...., représentées en grandeur et en direction par les droites AA', BB', CC',.... Enfin appliquons au premier point A une force P ou AM dirigée suivant le premier côté $A\alpha$, et au dernier point D une force Q ou DN dirigée suivant le dernier côté $D\beta$. Il s'agit de déterminer 1° les conditions d'équilibre des forces P, P', P'',...Q; 2° la figure du polygone, lorsque l'équilibre a lieu. Fig. 97.

1° Si tout le système est en équilibre, le premier sommet A doit être en équilibre de lui-même (220, 1°) en vertu des deux forces P, P', qui lui sont immédiatement appliquées, et en vertu de la tension du cordon AB, puisque l'action de toutes les autres forces ne peut se

transmettre au point A que par le cordon AB qui le relie aux autres points du polygone. Il y aura donc équilibre entre les deux forces P, P′ et la tension T′ du cordon AB, et l'on aura (221) les deux proportions

$$P : P' :: \sin P'AB : \sin PAB$$
$$P' : T' :: \sin PAB : \sin PAP'.$$

De même, le second sommet B doit être en équilibre en vertu de la force P″ et des tensions des cordons AB, BC. Or (220, 2°) l'action du point A sur le point B est parfaitement égale et contraire à l'action T′ du point B sur le point A, sans quoi le cordon AB ne pourrait être en équilibre; sa tension sera donc toujours T′, et en désignant par T″ celle du cordon BC, on aura

$$T' : P'' :: \sin P''BC : \sin ABC$$
$$P'' : T'' :: \sin ABC : \sin ABP'';$$

de même encore les conditions d'équilibre du troisième sommet C seront données par les proportions

$$T'' : P''' :: \sin P'''CD : \sin BCD$$
$$P''' : T''' :: \sin BCD : \sin BCP''';$$

ainsi de suite, quel que soit le nombre des sommets du polygone, et le dernier sommet D donnera

$$T''' : P^{\text{IV}} :: \sin P^{\text{IV}}DQ : \sin CDQ$$
$$P^{\text{IV}} : Q :: \sin CDQ : \sin CDP^{\text{IV}}.$$

Multipliant toutes ces proportions par ordre, on aura, pour le rapport des deux forces extrêmes P, Q,

$$P : Q :: \sin P'AB . \sin P''BC . \sin P'''CD . \sin P^{\text{IV}}DQ : \sin PAP' . \sin ABP'' . \sin BCP''' . \sin CDP^{\text{IV}}.$$

On obtiendra de même le rapport de deux forces ou de deux tensions quelconques, ou d'une force et d'une tension, en multipliant par ordre un certain nombre de ces proportions convenablement choisies.

2° Lorsque les forces P, P′, P″,... Q, et les directions

de leurs cordons respectifs satisfont aux proportions ci-dessus, il est toujours possible de donner au polygone une figure telle que l'équilibre ait lieu, et l'on détermine aisément cette figure par la composition successive des forces, quand on connaît toutefois les longueurs des cordons inextensibles qui doivent former les côtés du polygone.

A cet effet, après avoir placé en un certain point l'extrémité α de la corde $\alpha\,\beta$, on prend sur la direction $P\alpha$ de la force P, du côté opposé au sens de son action et à partir du point α, la longueur αA que le premier côté du polygone doit avoir, et le point A ainsi obtenu en sera le premier sommet.

Le second côté AB devant se trouver sur la direction de la résultante R des forces P, P' représentées en direction et en intensité par les droites AM, AA', si l'on construit sur ces droites le parallélogramme AMEA', et que sur le prolongement de la diagonale AE on prenne, à partir du point A, la longueur AB que le second côté doit avoir, le point B sera le second sommet. On obtiendra de même le troisième sommet C, en portant la longueur du troisième côté BC, à partir du point B, sur le prolongement de la diagonale BE du parallélogramme BE'FB' construit sur les droites BB' et $BE' = AE$, qui représentent la force P'' et la première résultante R ou la tension T'; ainsi de suite jusqu'au dernier côté $D\beta$, qu'on obtiendra en portant sa longueur, à partir du dernier sommet D, sur le prolongement de la dernière résultante R''' ou DH. Or ce côté $D\beta$, ainsi déterminé, doit nécessairement se trouver sur la direction DN de la dernière force Q. Car, dans l'état d'équilibre, cette force Q est égale et directement opposée à la résultante de toutes les autres du système; or, d'après la construction effectuée, la résultante R''' de toutes les forces, moins la force Q;

est représentée en grandeur et en direction par la diagonale DH du dernier parallélogramme DG'HD' construit sur les droites DD', DG', représentant la dernière force extérieure P^{IV} et la résultante R'' de toutes les forces précédentes.

Cette construction suppose qu'on applique successivement chaque résultante partielle au sommet suivant situé sur sa direction, par exemple la résultante R au point B, etc., ce qui peut en effet avoir lieu (221).

L'hypothèse d'une seule force appliquée à chacun des sommets n'altère en rien la généralité des résultats; car quelles que soient les forces qui sollicitent immédiatement le sommet A, par exemple, elles se réduisent toujours à une seule qu'on peut représenter par P'.

226. Comme dans l'état d'équilibre la dernière force Q est égale et directement opposée à la résultante R''' de toutes les autres, il résulte évidemment, de ce qui précède, que

Pour l'équilibre du polygone funiculaire, il faut que toutes les forces données P, P', P'',...Q, *transportées parallèlement à elles-mêmes en un point quelconque de l'espace, se fassent équilibre.*

Par conséquent, si l'on mène par le point O, où l'on a transporté les forces P, P', P'',...Q, trois axes rectangulaires OX, OY, OZ, et qu'on désigne respectivement par $m, a, b, c, \ldots n$, par $m', a', b', c', \ldots n'$, et par $m'', a'', b'', c'', \ldots n''$, les angles que les directions des forces font avec ces axes, les conditions d'équilibre du polygone funiculaire pourront s'exprimer par les équations d'équilibre d'un point matériel, entièrement libre dans l'espace, et soumis à l'action des mêmes forces. On aura donc (91) les trois équations d'équilibre

$$\begin{cases} P\cos m + P'\cos a + P''\cos b \ldots + Q\cos n = 0, \\ P\cos m' + P'\cos a' + P''\cos b' \ldots + Q\cos n' = 0, \\ P\cos m'' + P'\cos a'' + P''\cos b'' \ldots + Q\cos n'' = 0. \end{cases}$$

Au reste il serait facile de les obtenir directement, d'après l'observation que chaque sommet du polygone doit être en équilibre de lui-même, en vertu des forces qui lui sont appliquées, et des tensions des cordons adjacents. Car on aurait autant de systèmes de trois équations qu'il y a de sommets, et faisant alors séparément la somme des premières équations, celle des secondes équations, enfin celle des troisièmes équations de chacun des systèmes, les tensions T', T'',... des cordons intermédiaires disparaîtront, de sorte qu'on obtiendra en définitive les trois équations (1).

227. Puisque, dans l'état d'équilibre du polygone funiculaire, l'une quelconque des forces P, P', P''...Q appliquées aux divers sommets, est égale et directement opposée à la résultante de toutes les autres, on voit qu'alors

1° *Toutes ces forces se détruisent comme si le polygone avait une figure exactement invariable;*

2° *Chaque cordon est tendu par la force qui le sollicite, comme il le serait par la résultante de toutes les autres forces qu'on y transporterait parallèlement à elles-mêmes.*

228. Lorsque les extrémités α et β du polygone sont des points fixes, les forces P, Q représentent en même temps les pressions que ces points éprouvent, et les tensions des deux cordons extrêmes αA, Dβ. Alors, les intensités P, Q de ces forces, et les angles m, m', m'', n, n', n'', d'où résultent leurs directions, ne sont plus des quantités données. Mais on pourrait déterminer ces huit inconnues au moyen des huit équations suivantes, savoir, les trois équations (1), les deux relations

$$\cos^2 m + \cos^2 m' + \cos^2 m'' = 1$$
$$\cos^2 n + \cos^2 n' + \cos^2 n'' = 1,$$

et les trois équations qui précisent la position des deux points fixes α, β.

Par conséquent, *il est toujours possible de mettre en equilibre une corde attachée par ses extremités à deux points fixes, et sollicitée en des points invariables par des forces quelconques.*

La détermination des huit inconnues est, en général, très-compliquée. Mais lorsque le polygone a pris de lui-même la figure qui convient à l'état d'équilibre, on obtient facilement les tensions des différents cordons, ce qui est suffisant dans la pratique. En effet, si l'on décompose la force P′, appliquée au point A, en deux autres dirigées suivant les prolongements des côtés Aα, AB, la première composante exprimera la tension du cordon Aα ou l'effort exercé sur le point α, et la seconde composante sera la tension du cordon AB. De même, les composantes de la force P″, suivant les prolongements des côtés AB, BC, exprimeront les tensions des cordons AB, BC, dont la première vient d'être déterminée; ainsi de suite.

229. Dans le cas où les deux cordons extrêmes αA, D$\mathfrak{G}$ sont dans un même plan, leurs tensions P, Q ont une résultante. Or (227) cette force doit être égale et directement opposée à la résultante R de toutes les autres P′, P″, P‴,....., comme si le polygone avait une figure invariable. Par conséquent, il faut que cette résultante R passe par le point O, où les prolongements des cordons extrêmes αA, D$\mathfrak{G}$ viennent se couper, et qu'on peut prendre pour son point d'application. On obtiendra donc les tensions P, Q de ces cordons, en décomposant au point O la force R en deux autres dirigées suivant leurs prolongements.

Le même procédé donne les tensions de deux cordons quelconques situés dans un même plan, car l'équilibre de tout le système permettant de prendre chaque nœud pour un point fixe, ces deux cordons peuvent être re-

gardés comme les cordons extrêmes d'un polygone funiculaire. On décomposera donc, à leur point de concours et suivant leur direction, la résultante des forces appliquées aux nœuds intermédiaires, et ces deux composantes seront les tensions cherchées.

230. Lorsque toutes les forces extérieures P′, P″, P‴..., sont parallèles entre elles, ces forces et les côtés du polygone sont nécessairement dans un même plan. En effet, les trois cordons qui aboutissent au premier nœud A étant (221) dans un même plan, la force P″, qui a déjà un point B dans ce plan, doit s'y trouver entièrement comprise. Donc le plan des premiers cordons est le même que celui des trois seconds; ainsi de suite. Fig. 99.

Les angles intérieurs, formés par un côté quelconque avec les directions parallèles des deux forces adjacentes, étant alors supplémentaires, on a

$$\sin P'AB = \sin P''BA, \sin P''BC = \sin P''' CB, \text{ etc.}$$

Or les proportions du n° 225 donnent, pour les tensions P, T′, T″.... des cordons, les rapports suivants :

$$\begin{aligned} P &: T' :: \sin P' AB : \sin P' AP, \\ T' &: T'' :: \sin P'' BC : \sin P'' BA, \\ T'' &: T''' :: \sin P'''CD : \sin P'''CB; \end{aligned}$$

ou bien à cause des égalités sin P′AB = sin P″BA, etc.,

$$: T' :: \sin P'AB : \sin P'AP$$

$$:: \frac{1}{\sin P'AP} \text{ ou coséc } P'AP : \frac{1}{\sin P'AB} \text{ ou coséc } P'AB,$$

$$T' :: \sin P''DC : \sin P'AB$$

$$:: \frac{1}{\sin P'AB} \text{ ou coséc } P'AB : \frac{1}{\sin P''BC} \text{ ou coséc } P''BC.$$

....

Ainsi, *les tensions des cordons sont réciproquement pro-*

portionnelles aux sinus de leurs inclinaisons sur la direction commune des forces parallèles, ou, ce qui revient au même, *sont proportionnelles aux cosécantes de ces mêmes inclinaisons.*

231. Dans le cas particulier où ces forces parallèles sont
Fig. 99. verticales, si l'on suppose, en outre, que l'un des côtés, CD, soit horizontal, sa tension t pourra servir de terme de comparaison pour exprimer toutes les autres, puisqu'on aura $\cos P'''CD = 1$; et nommant φ l'angle AOH que la direction d'un côté quelconque αA fait avec l'horizontale CH, la tension T du côté αA sera donnée (230) par la proportion

$$T : t :: 1 : \text{coséc}\,\varphi :: \text{séc}\,\varphi : 1\text{, d'où } T = t\,\text{séc}\,\varphi.$$

On parvient directement au même résultat par le procédé indiqué plus haut (229). Car si l'on prolonge les côtés αA, CD, jusqu'à leur rencontre en O, et qu'on applique en ce point une force verticale R égale à la somme $P' + P'' + P'''$ des puissances intermédiaires, les trois forces t, T, R, se feront équilibre autour d'un même point, et l'on aura

$$T : t :: \sin ROC : \sin ROA :: 1 : \cos\varphi\,;$$

d'où

$$T : t :: \text{séc}\,\varphi : 1.$$

Donc, *dans l'équilibre d'un polygone funiculaire sollicité par des forces verticales, la tension de chaque cordon est proportionnelle à la sécante de l'angle qu'il fait avec l'horizon.*

On a aussi

$$R : t :: \sin AOC : \sin ROA :: \sin\varphi : \cos\varphi\text{, d'où } \text{tang}\,\varphi = \frac{R}{t},$$

et enfin

$$T : R :: 1 : \sin\alpha :: \text{coséc}\,\alpha : 1\text{, d'où } T = R\,\text{coséc}\,\alpha.$$

Ainsi, *la tangente de l'inclinaison de chaque côté sur l'horizon est proportionnelle à la somme des forces verticales appliquées sur le contour du polygone, depuis le côté horizontal jusqu'à celui que l'on considère ;*

Et *la tension d'un côté quelconque est égale à la même somme des forces verticales, multipliées par la cosécante de son inclinaison à l'horizon.*

Si l'on élimine l'angle φ entre les deux équations $T = t \,\text{séc}\, \varphi$ et $\tan \varphi = \frac{R}{t}$, en ayant égard à la relation $\text{séc}^2 \varphi - \tan^2 \varphi = 1$, on trouve

$$T^2 - R^2 = t^2 ;$$

Donc enfin, *la différence entre le carré de la tension d'un côté quelconque, et le carré de la somme des forces verticales, prises comme ci-dessus, est constamment égale au carré de la tension du côté horizontal.*

232. Dans tout ce qui précède, nous avons supposé que les forces extérieures P', P'', P''',.... agissent suivant des cordons attachés par des nœuds fixes aux sommets A, B, C.... du polygone funiculaire. Lorsqu'ils sont attachés par des nœuds coulants ou des anneaux susceptibles de glisser sur le contour du polygone, les conditions d'équilibre établies plus haut (225) deviennent insuffisantes, et il faut (223) que les directions des forces P', P'',.... divisent respectivement les angles αAB, ABC, en deux parties égales. Alors toutes les tensions P, T', T'',.... deviennent égales entre elles ; et si l'on représente par m', m'', m''',... les angles du polygone, on aura (223) Fig. 97

$$P' = 2T' \cos \frac{1}{2} m', \quad P'' = 2T'' \cos \frac{1}{2} m'', \text{ etc.},$$

d'où

$$P' : P'' : \ldots . : : \cos \frac{1}{2} m' : \cos \frac{1}{2} m'' : \ldots .$$

Donc alors *les forces appliquées aux divers sommets du polygone sont proportionnelles aux cosinus des moitiés des angles correspondants.*

Si les points A, B, C,.... sont des anneaux fixes dans lesquels passe la corde αAB....β, tirée aux deux bouts par les forces P, Q, la condition nécessaire et suffisante pour l'équilibre sera (224) que l'on ait $P = Q$. Toutes les tensions seront égales, et les pressions P', P''..., exercées sur les points fixes, auront les valeurs indiquées ci-dessus (232).

233. Si de plus tous les côtés du polygone funiculaire sont égaux entre eux, le cosinus de la moitié de l'angle ABC, par exemple, compris entre deux côtés contigus AB, BC, devient égal à l'un des côtés AB divisé par le diamètre $2r$ du cercle passant par les trois sommets consécutifs A, B, C ; et comme toutes les tensions T', T''..., sont égales entre elles, il en résulte que dans ce cas

Les forces appliquées sont en raison inverse des diamètres ou des rayons des cercles circonscrits aux triangles formés par les trois sommets consécutifs correspondants.

Il en est encore de même lorsque le polygone prend un nombre infini de côtés, c'est-à-dire, devient une *courbe funiculaire.* Alors chacun des cercles précédents est ce qu'on nomme le cercle *osculateur* à la courbe au point que l'on considère, et les pressions P', P''..., dirigées suivant les rayons de *courbure* r', r''...., sont par conséquent normales à la courbe.

Il suit de là que

1° *Une corde tendue par deux forces égales sur une courbe quelconque est en équilibre, et a partout la même tension ;*

2° *Chaque point de la courbe fixe éprouve, suivant la normale, une pression qui est en raison inverse du rayon de courbure en ce point.*

De la chaînette.

234. On nomme *chaînette* la ligne courbe formée par une corde uniformément pesante attachée par ses extrémités A, B à deux points fixes, et soumise uniquement à la pesanteur. La chaînette peut donc être considérée comme un polygone funiculaire d'une infinité de côtés, sollicité en tous ses points par de petites forces verticales, provenant des actions de la pesanteur. On voit déjà (230) que c'est une courbe plane, située dans le plan vertical passant par les deux points fixes A, B; et, en effet, il n'y a pas de raison pour qu'elle s'en écarte plutôt d'un côté que de l'autre. Fig. 100.

Si l'on remarque que les côtés du polygone funiculaire représentent les directions des tangentes menées de la courbe en ses différents points, on obtiendra facilement la tension en un point quelconque, au moyen des principes établis plus haut (231).

D'abord, pour déterminer les pressions que la corde exerce sur les deux points fixes A, B, et qui ne sont autres que les tensions des côtés extrêmes du polygone, il faut mener à la courbe les tangentes AO, BO, appliquer à leur point de concours une force égale au poids de la corde, et la décomposer en deux autres dirigées suivant OA, OB. Ces composantes seront évidemment les pressions cherchées.

On obtiendrait de même la tension T en un point quelconque M de la chaînette, en supposant qu'il est fixe. Mais si l'on désigne par R le poids de la partie CM de la corde comprise entre le point M et le point le plus bas C, où la tangente CH à la courbe est horizontale, et dont la tension est t, en nommant φ l'angle que la tangente au point M fait avec l'horizon, on aura (231)

$$T = t.\ \text{séc.}\varphi\ ,\ T = R.\ \text{coséc}\ \varphi.$$

Par conséquent, *si une corde ou même une chaîne pesante quelconque, suspendue à deux points fixes, est en équilibre, la tension en chaque point est 1° proportionnelle à la sécante de l'angle que la courbe fait en ce point avec l'horizon; 2° égale au produit de la cosécante du même angle par le poids de l'arc compris entre le même point et le point le plus bas.*

Dans le cas où la corde est uniformément pesante, comme nous l'avons mentionné dans la définition de la chaînette, on peut représenter le poids R de l'arc CM par sa longueur a, et l'équation tang $\varphi = \frac{R}{t}$ du n° 231 devient tang $\varphi = \frac{a}{t}$.

Donc, *la chaînette est une courbe telle, que la tangente de son inclinaison en un point quelconque sur un plan horizontal est proportionnelle à la longueur de l'arc compris entre le point le plus bas de la courbe et le point dont il s'agit.*

D'où il suit que la chaînette est une courbe symétrique par rapport à l'axe vertical CV passant par le sommet C, et se compose, comme la parabole, de deux branches égales et indéfinies.

APPENDICE

SUR LE PRINCIPE DES VITESSES VIRTUELLES ET SUR SON APPLICATION AUX PRINCIPALES MACHINES.

§ I. *Principe des vitesses virtuelles.*

235. On nomme *vitesse virtuelle* d'un point matériel toute droite infiniment petite qu'on peut lui faire décrire, en observant les conditions auxquelles il se trouve assujetti.

Ainsi, lorsque des points matériels M, M′, M″...., liés entre eux d'une manière quelconque, sont sollicités par des forces P, P′, P″...., agissant suivant les directions MP, MP′, MP″...., si l'on communique à ces points un mouvement infiniment petit, et compatible avec la liaison du système, de manière qu'ils soient transportés en m, m', m''...., les droites infiniment petites Mm, M′m', M″m''...., décrites par les points M, M′, M″.... sont leurs *vitesses virtuelles*. Cette dénomination provient de ce que les droites Mm, M′m'...., sont regardées comme les espaces qui seraient parcourus simultanément par les points du système, censé en équilibre, dans le premier instant où cet état viendrait à être détruit. Fig. 101

Si l'on projette les points m, m', m''...., en n, n', n''...., sur les directions des forces P, P′, P″...., les projections p, p', p''.... des droites Mm, M′m', M″m''.... sont les vitesses virtuelles des points M, M′, M″...., *estimées*

suivant les directions des forces, ces projections p, p', p'',... étant d'ailleurs prises avec le signe $+$ ou avec le signe $-$, suivant qu'elles tombent sur les directions mêmes des forces correspondantes, comme pour M$'m'$, ou sur leurs prolongements, comme pour Mm.

Enfin on nomme *moments virtuels* des forces P, P$'$, P$''$...., les produits Pp, P$'p'$, P$''p''$..., qu'on obtient en les multipliant par les projections respectives p, p', p''...., dont le signe détermine celui des moments.

Fig. 102. 236. Comme une force P, appliquée en un point M, peut être censée appliquée en tout autre point A de sa direction, pourvu que ces deux points soient liés entre eux d'une manière invariable, on conçoit que le moment virtuel de la force doit être le même dans les deux cas. Au reste, on peut le démontrer directement de la manière suivante.

Soient Mm, Aa, les vitesses virtuelles des points M, A; il suffit de faire voir que leurs projections Mm', Aa', sont égales entre elles, puisque l'intensité de la force P est une quantité constante. A cet effet, menons par le point M la droite MB égale et parallèle à ma, et du point B abaissons sur MA la perpendiculaire Bb. Comme la longueur de la droite MA, qui relie les points M, A, est invariable, on a MA $=$ ma $=$ MB; et comme par construction la droite Ba est égale et parallèle à Mm, leurs projections ba', Mm', sur MA, sont égales entre elles, et l'on a

$$\mathrm{M}m' = ba' = b\mathrm{A} + \mathrm{A}a',$$

d'où

$$\mathrm{M}m' - \mathrm{A}a' = b\mathrm{A}.$$

D'un autre côté

$$b\mathrm{A} = \mathrm{MA} - \mathrm{M}b = \mathrm{MA} - \sqrt{\overline{\mathrm{MB}}^2 - \overline{\mathrm{B}b}^2} = \mathrm{MA} - \sqrt{\overline{\mathrm{MA}}^2 - \overline{\mathrm{B}b}^2}.$$

Donc cette expression est la valeur de la différence entre les deux projections Mm', Aa'. Si Bb était nul, c'est-à-

dire si la droite MB était parallèle à MA, la différence $Mm' - Aa'$ serait égale à zéro. Or Bb n'est pas nul, mais bien un infiniment petit du second ordre; car on a

$$MA-\sqrt{MA^2-Bb^2}=\frac{(MA-\sqrt{MA^2-Bb^2})(MA+\sqrt{MA^2-Bb^2})}{MA+\sqrt{MA^2-Bb^2}}$$
$$=\frac{Bb^2}{MA+\sqrt{MA^2-Bb^2}}.$$

La différence entre Mm' et Aa', étant proportionnelle au carré de Bb, est donc un infiniment petit du second ordre, et par conséquent susceptible d'être négligé devant un infiniment petit du premier ordre: ainsi $Mm' = Aa'$.

Donc 1° *Le moment virtuel d'une force reste le même, en quelque point de sa direction qu'on la suppose appliquée.*

Il suit encore de là que

2° *Si deux forces* P, P′, *égales et contraires, agissent suivant la direction d'une droite* AM *liant d'une manière invariable deux points* A, M, *auxquels elles sont appliquées, la somme des moments virtuels* Pp, P′p', *de ces forces sera nulle.*

Car les moments virtuels Pp, P′p' étant égaux et de signes contraires, on aura $Pp + P'p' = 0$.

237. *Lorsque plusieurs forces sont appliquées à un même point, le moment virtuel de la résultante est égal à la somme des moments virtuels des composantes.*

En effet, soient R′ la résultante des deux forces P, P′, Fig. 103.
appliquées au point M, et Mm la vitesse virtuelle de ce point. Abaissons du point m sur les directions des forces P, P′, R′ les perpendiculaires mA, mB, mC, et par le point M menons AB perpendiculaire à la direction de R′. D'après le théorème établi plus haut (182), les trois forces P, P′, R′ seront respectivement représentées par les trois côtés du triangle AmB qui sont perpendiculaires à

leurs directions; donc les moments virtuels des forces P, P', R', seront $mA.Ma$, $mB.Mb$, AB.MC. Or ces produits mesurent le double de la surface des triangles mMA, mMB, mAB. Donc, puisque le dernier triangle mAB égale la somme des deux autres, on aura

$$mA.Ma + mB.Mb = AB.Mc,$$

ou bien, en appelant p, p', r' les projections de Mm sur les directions des forces,

$$Pp + P'p' = R'r'.$$

Il est facile d'étendre ce théorème à un nombre quelconque de composantes P, P' P''...., appliquées au point M, en combinant la résultante R' des deux premières forces P, P', avec la troisième P'', ce qui donnera

$$R'r' + P''p'' = R''r'' \text{ ou } Pp + P'p' + P''p'' = R''r'',$$

ainsi de suite; et en nommant R la résultante finale, on aura

$$Pp + P'p' + P''p'' + \ldots = Rr.$$

De là résulte le théorème suivant

Lorsqu'il y a équilibre entre des forces appliquées à un point matériel, soit entièrement libre dans l'espace, soit assujetti à demeurer sur une surface ou sur une courbe donnée, la somme des moments virtuels des forces est nulle; et réciproquement, si cette somme est nulle pour tous les mouvements que le point d'application peut prendre, les forces données se font équilibre.

Car 1° si le point M est entièrement libre, il faut, pour l'équilibre, qu'on ait $R = 0$, et par conséquent $Pp + P'p' + \ldots = 0$. Réciproquement, si l'on a $Pp + P'p' + \ldots = 0$, pour tous les mouvements que le point M peut prendre, il y aura équilibre. Car le point

M étant libre, on peut donner à la droite Mm une direction telle que r ne soit pas nul; on aura donc $R = o$.

2° Si le point M est assujetti à demeurer sur une surface ou sur une courbe donnée, la droite infiniment petite Mm appartiendra au plan tangent ou à la tangente en ce point, et par conséquent sera perpendiculaire à la résultante R, qui doit être dirigée suivant la normale, pour qu'il y ait équilibre; on aura donc $r = o$, et par suite $Pp + P'p' + \ldots = o$.

238. Ce dernier théorème n'est qu'un cas particulier d'un autre bien plus général, connu sous le nom de *Principe des vitesses virtuelles*, dont voici l'énoncé :

Lorsqu'il y a équilibre entre des forces appliquées à des points liés entre eux d'une manière quelconque, la somme des moments virtuels de ces forces est nulle; et réciproquement, *si cette somme est nulle pour tous les mouvements compatibles avec la liaison du système, les forces données se font équilibre.*

Ce grand principe renferme, pour ainsi dire, toute la mécanique; car toutes les questions que la science comporte ne sont en définitive que des développements de ce principe.

Pour le démontrer dans toute sa généralité, nous allons faire voir

1° *Qu'il a lieu pour un système de deux points;*

2° *Que s'il a lieu pour un système de* m *points, il sera encore vrai pour* m + 1 *points.*

Car alors le principe, une fois établi pour deux points, aura lieu pour trois points, puis pour quatre, et par conséquent pour un nombre quelconque de points.

1° Soient M, M' les deux points donnés, censés liés entre eux d'une manière *complète*, c'est-à-dire, telle que le mouvement de l'un détermine celui de l'autre, et supposons chacun d'eux lié de même à un troisième point Fig. 104.

N assujetti à demeurer sur une surface donnée. Désignons par P, P′ les forces qui agissent sur les points M, M′. Lorsque l'équilibre existe, on peut, sans le troubler, appliquer aux points M, N, deux forces S, S′, égales et directement opposées, et de même appliquer aux points N, M′ deux autres forces T, T′, égales et opposées. Mais si l'on choisit la force S de manière que sa projection sur la tangente Mm, menée à la courbe que le point M tend à décrire, soit égale et contraire à celle de P sur Mm, auquel cas les forces S, P se feront équilibre; et si l'on choisit de même la force T par rapport à P′, il est clair que les forces S′, T′ seront forcément en équilibre au point N, et que par conséquent chacun des trois points M, M′, N, sera séparément en équilibre en vertu des forces qui lui sont immédiatement appliquées. Par conséquent, la somme des moments virtuels des six forces du système sera nulle; or (236, 2°) cette somme est déjà nulle pour les quatre forces S, S′, T, T′; donc on a $Pp + P'p' = 0$.

2° Soint M, M′, M″...., les $m + 1$ points du système censés liés entre eux d'une manière *complète*, et sollicités par les forces P, P′, P″.... Lorsque l'équilibre existe, on peut, sans le troubler, appliquer à l'un des points, M par exemple, deux forces S, S′, égales et contraires, choisies de manière que S, l'une d'elles, fasse équilibre à la force P′ appliquée à un autre point quelconque M; ce qui donne $Pp + Ss = 0$. On n'a donc plus à considérer que les $m + 1$ forces $-$S, P′, P″.... agissant aux m points M′, M″... Mais alors, par hypothèse, on a $-Ss + P'p' + P''p'' + \ldots = 0$. Faisant la somme des deux équations précédentes, il vient

$$(1) \qquad Pp + P'p' + P''p'' + \ldots = 0.$$

Ce qui précède suppose que la liaison du système est *complète*, c'est-à-dire, telle que le mouvement de l'un

les points M, M′, M″.... détermine celui de tous les autres. Lorsqu'il en est autrement, il faut de plus, dans l'état d'équilibre, que l'équation (1) ait lieu pour tous les mouvements compatibles avec la liaison du système. Car admettons qu'elle ne soit pas satisfaite pour un certain mouvement. On pourra toujours, sans troubler l'équilibre, introduire de nouvelles liaisons qui ne permettent que ce seul mouvement; et dès lors le système, se trouvant lié d'une manière complète, ne pourra être en équilibre, comme on vient de le voir, à moins qu'on n'ait $Pp + P'p' + \ldots = 0$.

Donc enfin, *lorsqu'un système lié d'une manière quelconque est en équilibre, la somme des moments virtuels des forces est nulle.*

Réciproquement, *si la somme des moments virtuels* Pp, P′p′, P″p″ *est nulle pour tous les mouvements qu'on peut faire prendre au système, les forces* P, P′ P″,.... *se feront équilibre.*

Car admettons que, l'équilibre n'ayant pas lieu, les points M, M′, M″,... ou plusieurs d'entre eux, décrivent simultanément des droites infiniment petites Mm, $M'm'$, $M''m''$..., il est clair qu'on pourra toujours s'opposer au mouvement de ces points, en leur appliquant des forces convenables Q, Q′ Q″..., dirigées en sens contraires de Mm, $M'm'$, $M''m''$...; et comme alors il y aura équilibre entre les forces P, P′, P″,... Q, Q′, Q″..., on aura, d'après ce procédé,

$$Pp+P'p'+P''p''+\ldots+Qq+Q'q'+Q''q''+\ldots=0,$$

et par conséquent

$$Qq + Q'q' + Q''q'' + \ldots = 0, \quad (2)$$

puisque l'équation (1) est satisfaite.

Mais l'équation (2) ayant lieu pour tous les mouve-

ments possibles, si l'on prend pour les vitesses virtuelles des points M, M',.... les droites décrites Mm, $M'm'$...., qui sont toutes situées sur les prolongements des forces Q, Q'...., et par conséquent négatives, l'équation (2) aura tous ses termes de même signe, et ne pourra donc être satisfaite, à moins qu'on n'ait séparément,

$$Qq = 0, \quad Q'q' = 0, \text{ etc.}$$

Mais, par hypothèse, q ou Mm, q' ou $M'm'$,.... ne sont pas nuls. Donc il faut qu'on ait $Q = 0$, $Q' = 0$,.... Donc tous les points M, M',.... du système sont en équilibre, sans qu'il y ait besoin d'introduire de nouvelles forces à cet effet.

§ II. *Application du principe des vitesses virtuelles aux principales machines.*

239. Le principe des vitesses virtuelles donne avec la plus grande facilité les conditions d'équilibre des diverses machines.

Fig. 105. *Le levier.* — Soit un levier quelconque MAM' soumis à l'action de deux forces P, P', appliquées aux points M, M', et se faisant équilibre. Comme le levier ne peut prendre qu'un mouvement de rotation autour du point d'appui A, il n'y aura que la seule équation d'équilibre $Pp + P'p' = 0$; d'où il résulte d'abord que les moments virtuels Pp, $P'p'$ sont des signes contraires, puisque leur somme est nulle. Si l'équilibre se rompt, les points M, M' vont décrire, dans le premier instant, des arcs infiniment petits, toujours proportionnels à leurs rayons, comme étant semblables, et les tangentes Mm, $M'm'$ à ces arcs, qui représentent les vitesses virtuelles des points M, M', seront proportionnelles aux mêmes rayons; de sorte qu'on aura $Mm : M'm :: AM : AM'$. De plus, leurs

projections Mn, M$'n'$, ou p, p', devant être de signes contraires, si l'une p tombe sur la *direction même* de la force correspondante P, l'autre p' tombera nécessairement sur le prolongement de la force P'. Ainsi d'abord l'équilibre du levier exige *que les deux forces tendent à le faire tourner en sens contraires.*

Maintenant l'équation d'équilibre, en ayant égard aux signes, est $Pp = P'p'$, d'où $P : P' :: p' : p$. Or, si du point A l'on abaisse sur les directions des forces P, P', les perpendiculaires AB, A'B', les triangles AMB, AM'B', seront respectivement semblables aux triangles mMn, m'M$'n'$, comme ayant les côtés perpendiculaires chacun à chacun, et donneront

$$Mm : Mn :: AM : AB,\ M'm' : M'n' :: AM' : AB'.$$

Mais on a déjà

$$Mm : M'm' :: AM : AM';$$

donc

$$Mn \text{ ou } p : M'n' \text{ ou } p' :: AB : AB',$$

et par suite

$$P : P' :: AB' : AB.$$

Donc *les forces données doivent être en raison inverse de leurs distances au point d'appui.*

Ces deux conditions d'équilibre sont précisément les mêmes qu'on a trouvées plus haut (162).

La poulie. — Soit A le centre fixe d'une poulie sollicitée par deux forces P, R, appliquées aux points A, B, et se faisant équilibre. La poulie ne pouvant prendre qu'un mouvement de rotation autour du point A, il n'y aura qu'une seule équation d'équilibre $Pp + Rr = 0$, et les moments virtuels Pp, Rr seront de signes contraires. Si l'équilibre vient à se rompre, les points d'application A, B parcourront des arcs égaux, comme décrits avec des rayons égaux : donc les tangentes à ces arcs ou les Fig. 66.

vitesses virtuelles estimées suivant les directions des forces P, R, seront égales; et comme d'ailleurs elles doivent être de signes contraires, on aura $p = -r$. Ainsi l'équation d'équilibre donnera $P = R$, ou la même condition déjà trouvée plus haut (178).

Les moufles. — Le même principe donne également les conditions d'équilibre des machines composées. Prenons pour exemple les moufles qu'on a traitées au n° 185. L'appareil est disposé de manière que les n cordons, qui vont directement d'une moufle à l'autre, sont sensiblement parallèles, et que les points d'application des forces P, R, ne peuvent se mouvoir que suivant les directions de ces forces, mais en sens contraires. Comme d'ailleurs la longueur totale de la corde doit toujours rester la même, il est clair que si le point d'application de P descend d'une petite quantité p, chacun des cordons se raccourcira de la quantité $\frac{p}{n}$, et le point d'application de R montera de la même quantité. Si donc on représente par p, r, les vitesses virtuelles des forces P, R, estimées suivant les directions de ces forces, on aura la relation $r = \frac{p}{n}$, et l'équation d'équilibre $Pp + Rr = 0$, qui devient $Pp = Rr$, en ayant égard aux signes des moments virtuels, donnera $P = nR$, comme dans l'article cité.

Fig. 106. *Le tour.* — Soit un tour sollicité par deux forces P, R, en équilibre, l'une tangente à la roue AM, et l'autre à la circonférence AN comprise dans un plan perpendiculaire à l'axe projeté en A. Comme l'appareil ne peut prendre qu'un mouvement de rotation autour de l'axe, si l'on désigne par p, r, les vitesses virtuelles des points d'application M, N, estimées suivant les directions des forces, on n'aura que la seule équation d'équilibre $Pp + Rr = 0$; d'où il résulte d'abord que les forces P, R, doivent ten-

dre à faire tourner le treuil en sens contraires. De plus, les arcs parcourus dans le premier instant par les points M, N, étant toujours semblables, et par suite proportionnels aux rayons AM, AN, il en sera de même de leurs tangentes M*m*, N*n* ou *p*, *r*, et l'on aura $p : r :: \mathrm{AM} : \mathrm{AN}$. Or, l'équation ci-dessus devient, en ayant égard aux signes, $\mathrm{P}p = \mathrm{R}r$, d'où $\mathrm{P} : \mathrm{R} :: r : p$. Comparant les deux proportions précédentes, on a $\mathrm{P} : \mathrm{R} :: \mathrm{AN} : \mathrm{AM}$, c'est-à-dire la même condition d'équilibre qu'au n° 187.

Le plan incliné. — On a vu (199) que si un corps, dont le poids est R, est tenu en équilibre par une puissance P sur un plan incliné ABC (fig. 80-82), les directions des deux forces P, R, sont nécessairement situées dans un même plan vertical perpendiculaire au plan incliné, et se rencontrent en un même point O, où elles sont censées appliquées. Si l'équilibre se rompt, le point O ne pourra se mouvoir que suivant une parallèle à la longueur du plan incliné, et l'on n'aura que la seule équation d'équilibre $\mathrm{P}p + \mathrm{R}r = 0$. Ainsi les moments virtuels P*p*, R*r* seront de signes contraires, et les projections *p*, *r*, de la vitesse virtuelle du point O tomberont nécessairement, l'une sur la direction même de la force correspondante, l'autre sur le prolongement de la seconde force. Donc, en ayant égard aux signes, l'équation d'équilibre deviendra $\mathrm{P}p = \mathrm{R}r$, d'où $\mathrm{P} : \mathrm{R} :: r : p$ (1).

Cela posé, 1° si la puissance est parallèle à la longueur du plan incliné, le point O venant en O', les projections *p*, *r*, de la vitesse virtuelle OO' sur les directions des forces P, R, seront OO', O*n*, et les triangles semblables OO'*m*, BAC donneront O*n* ou $r : \mathrm{OO'}$ ou $p :: \mathrm{BC} : \mathrm{AB}$; donc, à cause de la proportion (1), il vient $\mathrm{P} : \mathrm{R} :: \mathrm{BC} : \mathrm{AB}$, comme au n° 200, 1er cas. Fig. 107.

2° Si la puissance P est horizontale, les projections *p*, *r*, de OO' sur les directions de P, R, seront O*m*, O*n*; Fig. 108.

alors les triangles semblables $OO'n$, ABC donneront $On : O'n$ ou $Om : : BC' : AC'$; donc, à cause de la proportion (1), il vient $P : R : : BC : AC$, comme au n° 200, 2e cas.

Fig. 109. 3° Lorsque la puissance P a, dans son plan vertical, une direction quelconque OP, les projections p, r, de la vitesse virtuelle OO' sur les forces P, R, sont les longueurs Om, On, d'ailleurs proportionnelles aux cosinus des angles $O'Om$, $OO'n$; de sorte qu'on a

$$On : Om : : \cos O'On : \cos O'Om : : \sin \alpha : \cos \gamma,$$

α étant l'angle BAC du plan incliné, et γ l'angle $O'Om$ que la direction de la puissance fait avec la longueur du plan. Donc, à cause de la proportion (1), il vient

$$P : R : : \sin \alpha : \cos \gamma,$$

comme au n° 202.

La vis. — La théorie de cette machine nous a offert quelque difficulté pour établir ses conditions d'équilibre d'une manière à la fois élémentaire et rigoureuse. Or, à l'aide du principe des vitesses virtuelles, cette détermi-
Fig. 89. nation est très-simple. La vis étant supposée fixe et verticale, soit P une puissance horizontale appliquée en un point C lié d'une manière invariable avec l'écrou dont le poids R est la résistance à vaincre. La force P tend à élever l'écrou en le faisant tourner autour de l'axe AB de la vis, et l'écrou tend à descendre en vertu de la force R qui agit pour le faire tourner en sens contraire autour du même axe. L'écrou ne pouvant ainsi prendre qu'un mouvement de rotation autour de l'axe, si l'on désigne par p, r, les projections des vitesses virtuelles des points d'application sur les directions des forces P, R, on n'aura que la seule équation d'équilibre $Pp = Rr$, d'où $P : R : : r : p$. Mais, d'après la définition de la vis, lorsque l'écrou fait un tour entier, il descend d'une hau-

teur égale au pas h de la vis, et s'il tourne d'une quantité p, il ne descend que d'une hauteur r déterminée par la proportion $2\pi.CD : h :: p : r$, CD représentant la distance de la force P à l'axe. La comparaison des deux proportions donne $P : R :: h : 2\pi.CD$, comme au n° 212.

La balance de Roberval. — Supposons que cette machine (décrite au n° 216, fig. 93 et 94) soit tenue en équilibre par deux forces verticales P, Q, appliquées aux points E, F, et que les bras AM, MB du levier principal AB soient dans le rapport quelconque de m à n. Si l'équilibre vient à se rompre, le levier principal tournera autour du point d'appui O, et comme d'ailleurs il ne peut prendre que ce mouvement de rotation, il n'y aura que la seule équation d'équilibre $Pp + Qq = 0$, où p, q, représentent les projections des vitesses virtuelles des points d'application E, F, sur les directions verticales des forces P, Q. Par suite de la liaison du système, si le point E monte ou descend d'une certaine quantité, tous les points de la traverse horizontale EC et de la tringle verticale Aa monteront on descendront de la même quantité. Or, les points A, E décrivent, dans le premier instant, de petits arcs dont les tangentes AA', EE' sont les vitesses virtuelles de ces points ; donc les projections AA'', EE'' de ces tangentes sur les verticales passant par les points A, E, sont égales, et l'on a toujours EE'' ou $p =$ AA''. Il est clair qu'il en est de même pour le point d'application F de la force Q par rapport au point B ; ainsi l'on aura $q =$ BB''. Maintenant l'équation d'équilibre $Pp + Qq = 0$ montre que les moments virtuels Pp, Qq sont de signes contraires, aussi bien que les projections p, q, des vitesses virtuelles ; et en effet, si l'une des extrémités du levier principal s'élève, l'autre doit s'abaisser. Ainsi, en ayant égard aux signes, l'é- Fig. 110

quation d'équilibre sera $Pp = Qq$, d'où

$$P : Q :: q : p \quad (1).$$

Or, d'une part, les triangles semblables AA'A'', BB'B'' donnent BB'' ou q : AA'' ou p :: BB' : AA'; d'autre part, les tangentes AA', BB' à des arcs semblables, étant proportionnelles aux rayons OA, OB, on a

$$BB' : AA' :: OB : OA :: m : n,$$

et par conséquent

$$q : p :: n :: m.$$

Comparant cette proportion à la première, on a, comme au n° 216,

$$P : Q :: n : m :: OB : OA.$$

Fig. 111. *La balance de Quintenz.* — D'après la construction de la machine (décrite au n° 218, fig. 95 et 96), le levier AC est horizontal, lorsque le poids P, suspendu à son extrémité A, fait équilibre au poids R placé sur le plateau mobile KL. Si l'équilibre se rompt, le levier AC tournera autour du point d'appui, de sorte que si l'extrémité A s'élève, le point B et l'autre extrémité C s'abaisseront.

Ainsi, dans le premier instant, le point A décrit un petit arc dirigé en sens contraire des arcs décrits par les points B, C, et les tangentes verticales AA', BB', CC' exprimeront, l'une, la quantité dont le point A aura monté, les autres, les quantités dont les points B, C auront descendu. En même temps, les extrémités inférieures K, D, des tringles verticales BK, CD, viendront en K', D'; et comme les longueurs des tringles restent invariables, on aura B'K' = BK, C'D' = CD, d'où l'on conclut BB' = KK', CC' = DD'. Par suite de ce mouvement, le point d'appui E du plateau mobile descend d'une quantité EE' proportionnelle à sa distance EF au point fixe F,

et par conséquent déterminée par la proportion

$$FD : FE :: DD' \text{ ou } CC' : EE'.$$

Or, par la construction même de la machine, on a

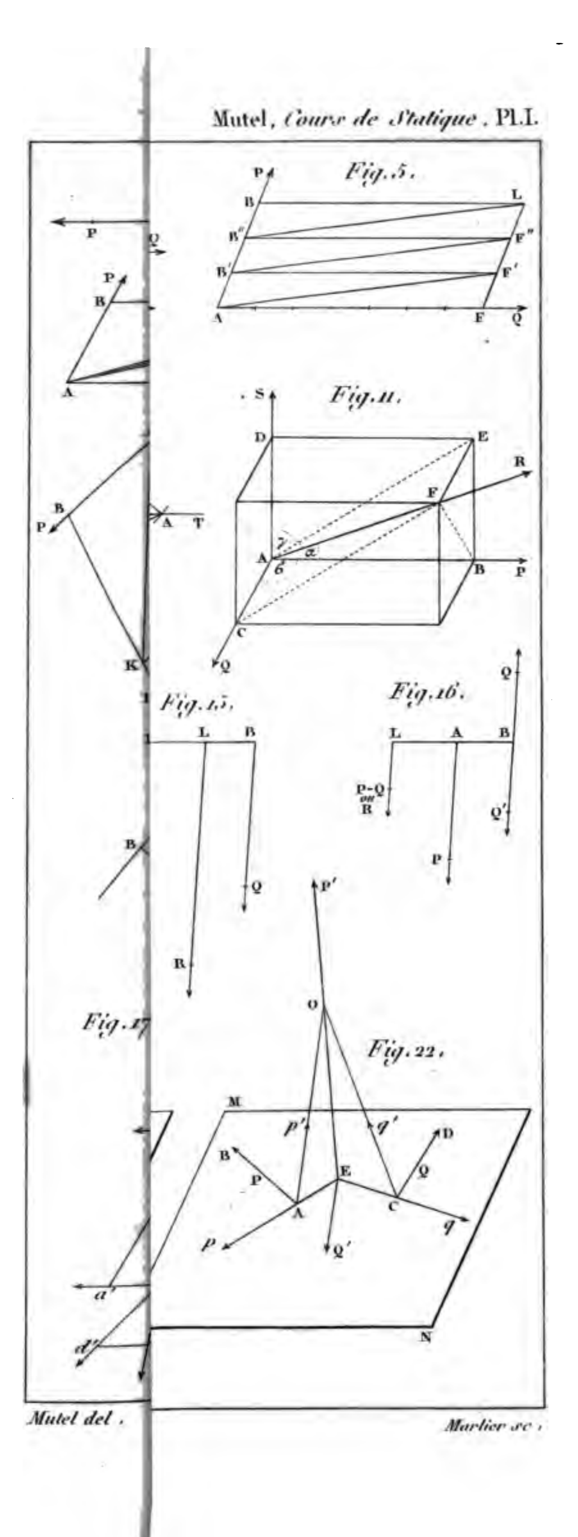
$$OC : OB :: FD : FE ;$$

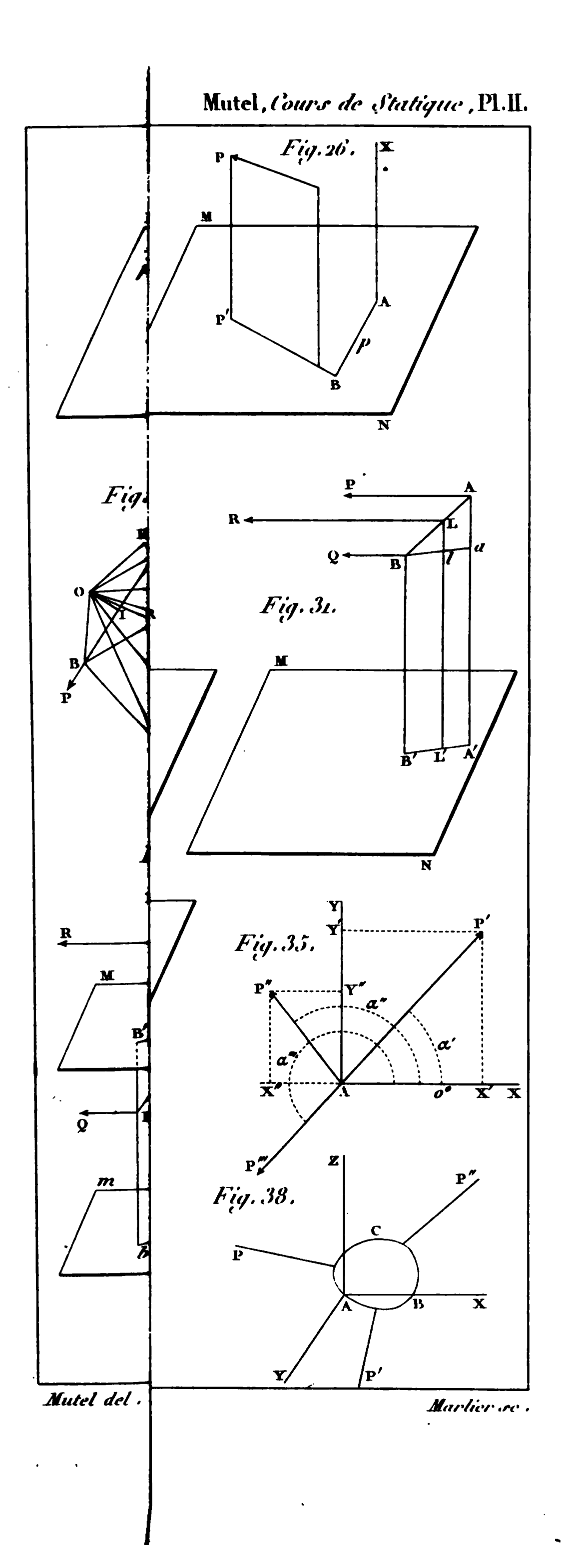
ces deux proportions ayant un rapport commun, il vient $OC : OB :: CC' : EE'$. Maintenant les triangles semblables OCC′, OBB′ donnent la proportion

$$OC : OB :: CC' : BB',$$

dont les trois premiers termes sont les mêmes que dans la précédente; de là on conclut $EE' = BB' = KK'$. Donc les deux points K, E du plateau mobile ont descendu de la même quantité, et, par conséquent, il en est de même du poids R placé sur ce plateau. Ainsi les moments virtuels des poids P, R, sont $P.AA'$, $R.BB'$, et l'équation d'équilibre $Pp + Rr = 0$ devient, eu égard aux signes, $P.AA' = R.BB'$, d'où $P : R :: BB' : AA'$. Mais les triangles semblables OAA′, OBB′ donnent $BB' : AA' :: OB : OA$. Comparant cette proportion à la précédente, on obtient enfin, comme au n° 218, $P : R :: OB : OA$, ou la même loi d'équilibre que dans le levier.

FIN.

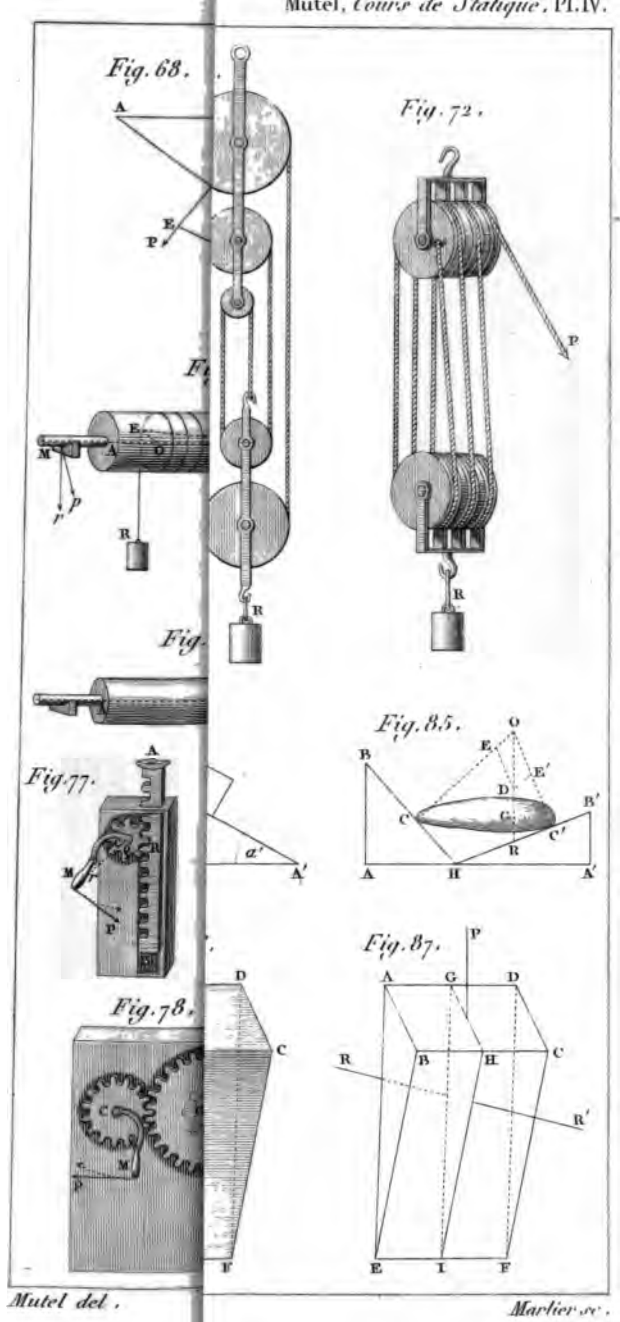

Mutel, Cours de Statique. Pl.I.
Fig.5.
Fig.11.
Fig.15.
Fig.16.
Fig.17
Fig.22.
Mutel del.
Marlier sc.



Mutel del. Marlier sc.

Fig. 44. *Fig. 45.* *Fig. 50.* *Fig. 51.* *Fig. 52.* *Fig. 58.* *Fig. 67.*

Mutel del. *Marlier sc.*



Mutel del.

Marlier sc.

Fig.

Fig. 89.

Fig. 93.

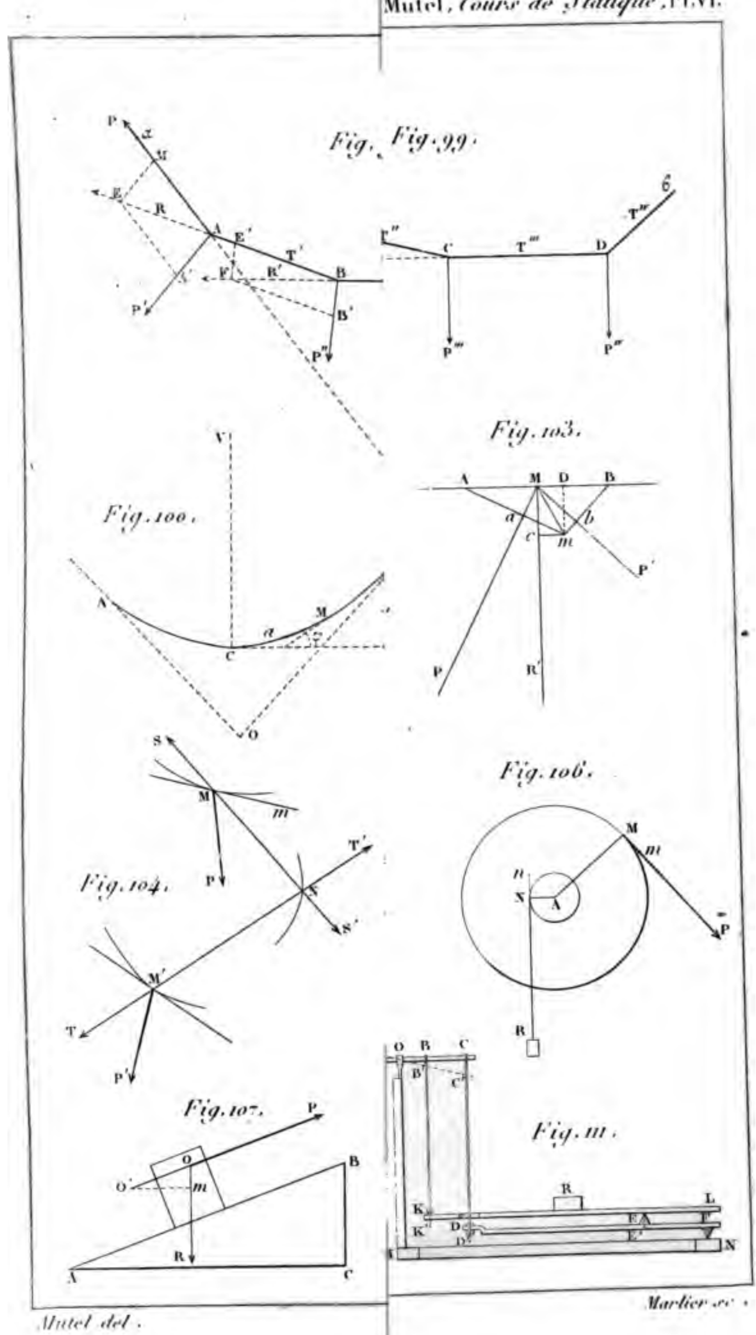
Fig. 92.

Fig. 96.

Fig.

Mutel del.

Marlier sc.



Mutel del.

Marlier sc.







